



黎曼曲面及其映射

这是一份相当粗糙的黎曼曲面讲义。排版反复报错让我疲于奔命了，所以这份笔记有点中道崩殒之感。将就着看吧。

1 黎曼曲面的基本定义

粗略来说，黎曼曲面理论就是将复分析推广到利用微分几何思想的一个领域：

就像一个二维流形可以看作是由平滑拼接的实平面 \mathbb{R}^2 的若干片段构成的复杂物体，我们则取复平面 \mathbb{C} 的“片段”，通过解析的方式拼接在一起。

我们已经知道，全纯函数理论非常美妙——它们都是解析的！因此，在这里也可以预期同样的严格性。

实际上，在紧致的黎曼曲面上，相关理论甚至比全纯函数的情形更加优雅。例如：

- 对于两个黎曼曲面 X 和 Y （其中 Y 是紧致的），任何从 X 到 Y 的亚纯函数 f 实际上都是全纯的，即在每个点都有定义。
- 如果 X 是紧致的黎曼曲面，则从 X 到 \mathbb{C} 的全纯函数 f 必为常数。
- 在上述情形下，如果 $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ 是亚纯函数，则 g 的零点与极点（计重数）相等。

注释 1 (为何会有如此美好的性质？). 粗略来说， \mathbb{C} 不是紧致的——它与去掉一个点的黎曼球面同构。通过补上这个空缺，我们可以将亚纯函数延拓，使得原先的极点处取值为 ∞ 。

作为一个可定向的二维流形，我们可以定义黎曼曲面的**属** (genus)——这是一个纯粹的拓扑概念，但它却与许多代数不变量有着极为出人意料的关系。

你可能听说过密码学中使用的椭圆曲线——它们本身就是黎曼曲面，而其推广形式——**高椭圆曲线**，则构成了任意属 (≥ 2) 的黎曼曲面家族！

1.1 复结构

回顾前几章中的定义：

- 一个拓扑 n -流形是一个满足 Hausdorff 性质的空间，其存在一组覆盖 $\{U_i\}$ ，其中每个 U_i 与 \mathbb{R}^n 同胚。
- 一个光滑 n -流形是在上述拓扑流形的基础上，要求所有过渡映射均为光滑函数。

它们有何共同之处？看起来似乎没什么，但本质上，它们都描述了一种相同的思想：

哲学思考：我们取若干（可数个）小片段 $\{U_i\}$ ，在保留其内在结构的前提下将它们拼接在一起。

这里，一个拓扑流形具有拓扑结构，而一个光滑流形具有光滑结构。以此类推，一个复流形具有复结构。

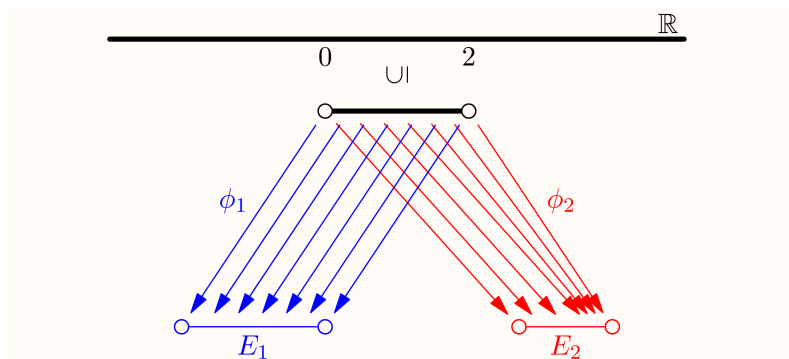
那么这里所说的“结构”是什么意思呢？

首先，拓扑结构对你来说再熟悉不过了——它就是一个拓扑。形式上，拓扑由一组开集定义，但拓扑结构的实质在于规定：

- 一个集合是否被视为开集或闭集，
- 一个点列是否收敛于某一点，
- 一个从 X 到 Y （或反向）的映射是否连续（前提是 Y 本身也是一个拓扑空间），
- 等等。

对于一个已有（Hausdorff）拓扑结构的拓扑 n -流形，我们可以判断一个局部坐标图是否尊重这一拓扑结构；换句话说，即判断其是否为同胚。

例 2 ($(0, 2)$ 是一个拓扑 1-流形). 区间 $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ 可以看作一个拓扑流形。



展示了该空间的两个可能的坐标图 ϕ_1 和 ϕ_2 。它们的表达式分别为

$$\phi_1: (0, 2) \rightarrow (0, 2), \quad \phi_1(x) = x,$$

以及

$$\phi_2: (0, 2) \rightarrow (0, 1.3), \quad \phi_2(x) = x + 0.35 \cdot (1 - x - |1 - x|).$$

在上面的例子中，你可能会注意到，即使坐标图 ϕ_2 是一个同胚映射，但它看起来并不光滑。因此，我们希望将一个光滑的二维流形定义为：

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ ，如果对于 S 中的每个点 p ，都存在一个开邻域 $V \subset S$ ，使得 V 与 \mathbb{R}^2 的某个开子集 E 之间存在微分同胚，则称 S 为一个光滑的二维流形。

事实上，这正是经典微分几何中的定义——当然，这个定义并非完全通用，例如我们知道克莱因瓶无法嵌入到 \mathbb{R}^3 中。那么，为什么我们在光滑流形中没有这样定义呢？问题在于，微分同胚的概念并不能在一个 Hausdorff 拓扑空间上定义——实际上，它根本无法定义，如上例中你可以看到存在同胚但非微分同胚的映射——换句话说，一个拓扑空间可以赋予不同的光滑结构。因此，光滑流形的定义实质上通过将每个 $E_i \subset \mathbb{R}^n$ 的光滑结构诱导到拓扑空间 M 上，从而隐含地定义了什么是光滑结构。过渡映射必须是光滑的，这一条件当然是为了保证由不同的 ϕ_i 诱导出来的 M 上的光滑结构是一致的。

同样地，我们可以将拓扑流形的定义替换为：

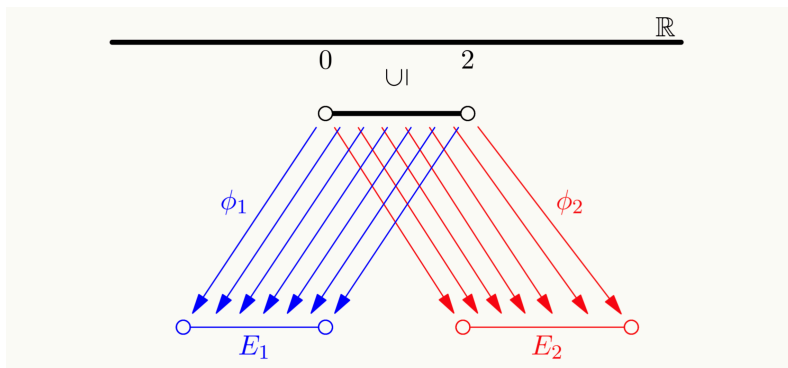
一个拓扑 n -流形 M 是一个集合，其具有一族覆盖 M 的子集 $\{U_i\}$ ，对于每个 U_i ，存在一个双射

$$\phi_i: U_i \rightarrow E_i \subset \mathbb{R}^n,$$

其中每个 E_i 都是 \mathbb{R}^n 的开子集，并且所有的过渡映射均为拓扑同胚。

这里， ϕ_i 充当了“集合同构”的角色，其作用与光滑流形中的同胚类似，而拓扑结构也是从这些片段 E_i 诱导出来的。

例 3 ($(0, 2)$ 是一个光滑的 1-流形)。正如前面所述，区间 $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ 同样可以视为一个光滑流形。



这一次， ϕ_1 与上例相同，但 $\phi_2: (0, 2) \rightarrow (0, 2 + \frac{1}{e})$ 定义为

$$\phi_2(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \leq 1, \\ x + e^{-1/(x-1)}, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$$

由于 ϕ_1 、 ϕ_2 及其逆函数均为光滑函数，因此过渡映射 $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ 与 $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ 均为光滑，从而满足相应的定义要求。

你应花点时间体会这一思想——由于 \mathbb{R}^n 上的光滑函数如此自然，我们很容易忽略：一个光滑流形所承载的结构远不止是其拓扑性质。正如上例所示， \mathbb{R}^n 不仅仅是光滑的，它还具有解析结构；而坐标图 ϕ_2 却不保留这种结构。因此，对于黎曼曲面，我们可以简单地表述为：

哲学思考：黎曼曲面是一个局部与 \mathbb{C} 同构的光滑（实）二维流形，并且携带着复光滑结构。

当然，借助复分析的奇迹——全纯函数本质上是解析的！——这就等价于说，黎曼曲面携带着一个复解析结构。

2 黎曼曲面

基于上述动机，黎曼曲面的定义自然地给出：

定义 4 (黎曼曲面). 一个**黎曼曲面** X 是一个满足第二可数、连通且 Hausdorff 的空间，存在一组可数个开集覆盖 $\{U_i\}$ ，其中每个 U_i 与 \mathbb{C} 的某个开子集同胚，即存在同胚映射

$$\phi_i: U_i \xrightarrow{\sim} E_i \subseteq \mathbb{C},$$

并且由下式定义的**过渡映射**

$$\phi_{ij}: E_i \cap \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} E_j \cap \phi_j(U_i \cap U_j)$$

均为解析函数。每个 ϕ_i 称为**复坐标图**，它们合在一起构成一个**复图集**。

我们称这个复图集赋予该 Hausdorff 空间一个**复结构**。换句话说，黎曼曲面就是一个带有复结构的（第二可数、连通、Hausdorff 的）拓扑空间。

文献 [?] 中给出了另一种通过极大复图集定义的方式。两种定义本质上等价，但在实际应用中，指定有限多个复坐标图比指定无限多个要容易得多。

一个复坐标图 $U_i \rightarrow E_i$ 可以看作是在 U_i 上给出一个**局部坐标**。形式上：

定义 5. 设 $p \in X$, $U \subseteq X$ 为开集，且 $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ 为一个复坐标图。对于每个 $x \in U$ ，记 $z = \phi(x)$ ，则称 z 为**局部坐标**。当 $\phi(p) = 0$ 时，我们称该局部坐标在 p 点处是以 p 为中心的。

2.1 复流形

类似于实 n -流形的定义，我们可以定义复流形。正如前述，其结构相比于单纯的光滑流形具有更强的严格性。

定义 6 (复 n -流形). 一个**复 n -流形**是一个 Hausdorff 空间，存在一组可数个开集覆盖 $\{U_i\}$ ，其中每个 U_i 与 \mathbb{C}^n 的某个开子集同胚，即存在同胚映射

$$\phi_i: U_i \xrightarrow{\sim} E_i \subseteq \mathbb{C}^n,$$

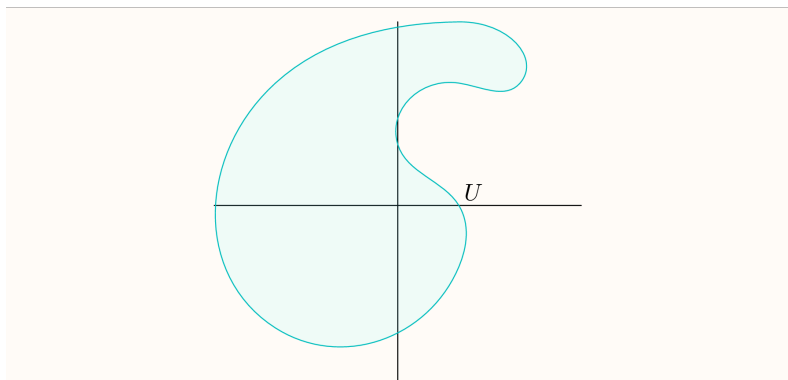
且所有的**过渡映射** ϕ_{ij} 均为解析函数。

显然，一个复 n -流形自然也是一个光滑（实） $2n$ -流形。

2.2 黎曼曲面的例子

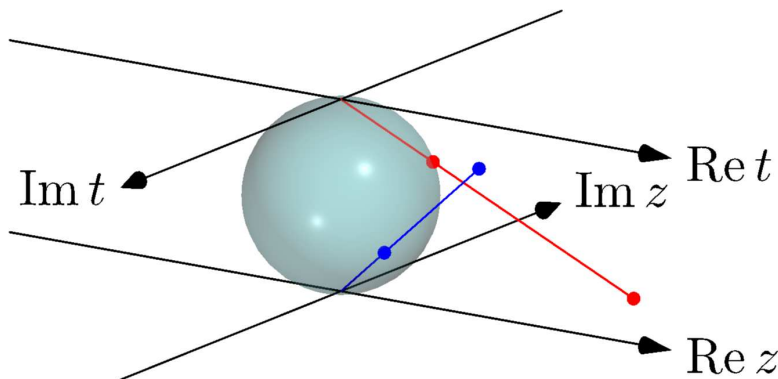
在本章中，我们将给出几个例子。

例 7 (复平面的开子集). 任意连通的开子集 $U \subseteq \mathbb{C}$ 都是一个黎曼曲面。



这是一个有点无聊的例子（整个曲面可以不用任何拼接就定义出来），但我们继续。

例 8 (黎曼球面). 黎曼球面 \mathbb{C}_∞ 作为一个光滑的二维流形，本质上就是一个球面。



它的复结构定义如下：将球面嵌入 \mathbb{R}^3 中，使得 $N = (0, 0, 1)$ 与 $S = (0, 0, 0)$ 为一对对 \mathbb{R} 点。令 E_1 为 xy -平面， E_2 为 $z = 1$ 的平面。然后，定义映射

$$\phi_1: \mathbb{C}_\infty \setminus \{N\} \rightarrow E_1$$

为从点 N 出发的立体投影，将除 N 之外的球面映射到 E_1 上；同样定义

$$\phi_2: \mathbb{C}_\infty \setminus \{S\} \rightarrow E_2$$

为从点 S 出发的立体投影，将除 S 之外的球面映射到 E_2 上。我们可以将 E_1 与 E_2 视作嵌入在 \mathbb{R}^3 中的复平面拷贝，分别由

$$z \mapsto (\Re z, \Im z, 0) \in E_1, \quad t \mapsto (\Re t, -\Im t, 1) \in E_2$$

给出。于是 ϕ_1 与 ϕ_2 就构成了 \mathbb{C}_∞ 的复坐标图。二者的定义域覆盖了整个 \mathbb{C}_∞ 。为了使 \mathbb{C}_∞ 成为一个复流形，我们必须保证由 ϕ_1 与 ϕ_2 所诱导的复结构一致——事实上，对于包含 N 与 S 均不在内的任一开集 U ，对所有 $p \in U$ 有

$$\phi_1(p) = \frac{1}{\phi_2(p)}.$$

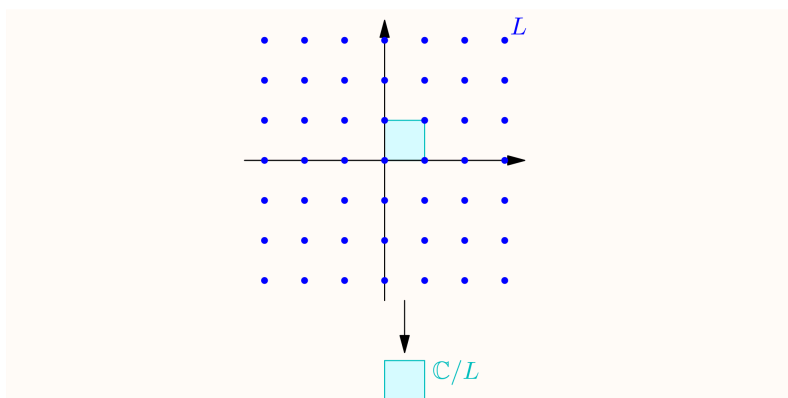
这也解释了为什么在映射 $t \mapsto (\Re t, -\Im t, 1)$ 中需要负号——否则，过渡关系将变为

$$\phi_1(p) = \frac{1}{\overline{\phi_2(p)}},$$

而这显然不是解析的。我们可以将黎曼球面看作是通过将两个复平面的拷贝拼接在一起，从而“补全”了缺失的无穷远点 ∞ 的结果。

在上述例子中，由 ϕ_1 给出的局部坐标以 S 为中心，而由 ϕ_2 给出的局部坐标则以 N 为中心。点 $\phi_1^{-1}(4)$ 在坐标图 ϕ_1 下的局部坐标为 $z = 4$ ，而在坐标图 ϕ_2 下则为 $t = \frac{1}{4}$ 。

例 9 (复圆环面). 设 L 为形如 $\mathbb{Z}[i]$ 的复数集合，即实部与虚部均为整数的复数，则 L 构成了 \mathbb{C} 的一个加法子群。考虑商空间 \mathbb{C}/L ，商映射 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$ 自然地在 \mathbb{C}/L 上诱导了一个复结构。



这里我们将 \mathbb{C}/L 绘制为一个正方形，但你应想象正方形的上下边以及左右边是经过光滑拼接的。对于圆环面上的每个小片段，我们可以通过取商映射的适当原像部分同构地映射到 \mathbb{C} 上——不同投影选择之间的过渡函数为 $\phi_{ij}(x) = x + a$ (其中 $a \in L$)，这显然是解析的。复圆环面是紧致的，因此在 \mathbb{C}/L 上的任何全纯函数均为常函数；而亚纯函数则更有趣且构造上也较为困难。

例 10. 两个黎曼球面的非连接并不是一个黎曼曲面，因为它不连通。

黎曼曲面必须连通这一条件仅仅是为了保证各类定理的优美——这并不影响一般性，因为任何具有复结构的拓扑空间都可以分解为各连通分支，每个分支都是一个黎曼曲面。

3 黎曼曲面之间的映射

3.1 定义

定义正如我们预期的那样——由于黎曼曲面的主要特征在于其复结构，一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 为黎曼曲面之间的映射，当且仅当它是全纯的。

定义 11. 设 X 与 Y 为黎曼曲面。映射 $f: X \rightarrow Y$ 在某点 $p \in X$ 处全纯，当且仅当存在 X 上的坐标图 $\phi_1: U_1 \rightarrow E_1$ (其中 $p \in U_1$) 以及 Y 上的坐标图 $\phi_2: U_2 \rightarrow E_2$ (其中 $f(p) \in U_2$)，使得复合映射

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$$

在 $\phi_1(p)$ 处为全纯。当 f 在 X 的每个点处均全纯时，我们称 f 为黎曼曲面之间的映射。

换句话说， f 全纯当且仅当在局部坐标下它表现为一个全纯函数。

例 12. 以下给出几个例子：

- 映射 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 定义为 $f(x) = x^3$ 是一个黎曼曲面之间的映射。注意，该函数并非双射：对于每个 $p \neq 0$ ，存在一个开邻域使得 f 有反函数，但在 0 处 f 则没有反函数。
- 复平面嵌入到黎曼球面中，即 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}_\infty$ ，也是一个映射。

4 到黎曼球面的函数

在本节中，我们将看到，黎曼球面 \mathbb{C}_∞ 可以看作是“在 \mathbb{C} 上加上一个无穷远点”。这种解释使我们能够将亚纯函数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 视作全纯映射 $g: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ，从而更好地处理亚纯函数——这样一来，再也不存在奇点，所得函数 g 在各处都是全纯的！

首先，我们观察到 \mathbb{C}_∞ 自然可以解释为在 \mathbb{C} 上添加一个点。按照 **Example 8** 中的记号，通过映射 ϕ_1 将 $\mathbb{C}_\infty \setminus \{N\}$ 与 E_1 (从而与 \mathbb{C}) 对应起来，我们令点 N 为 ∞ 。

问题 13. 请你验证，称该点为 ∞ 是合理的——即对于 \mathbb{C} 中任一满足 $|z_i| \rightarrow +\infty$ 的点列 $\{z_i\}$ ，有 $\phi_1^{-1}(z_i) \rightarrow \infty$ (在 \mathbb{C}_∞ 的拓扑意义下)。

因此，令 X 为一个黎曼曲面， $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为 X 上的一个亚纯函数。自然地，可以定义函数 g 为

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{如果 } f(z) \neq \infty, \\ \infty, & \text{如果 } f(z) = \infty. \end{cases}$$

则 g 不仅连续，而且解析。

问题 14. 显然，对于 X 中任一点 z ，若 $g(z) \neq \infty$ ，则 g 为解析函数。请你证明，在 $g(z) = \infty$ 的点处， g 也解析。(按照 **Example 8** 中的记号，取一个小的开集 $U \subseteq X$ ，并将 $g(U) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ 重新参数化为 $t = 1/z$ 。)

因此，我们有如下命题：

命题 15. 在不恒等于 ∞ 的条件下，亚纯函数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 与全纯映射 $g: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 之间存在一一对应关系。

或者更通俗地说：

哲学思考：在 \mathbb{C} 的无穷远处“填洞”使我们能够将亚纯函数解析地延拓为定义在 $\mathbb{C} \cup \infty$ 上、处处全纯的映射。

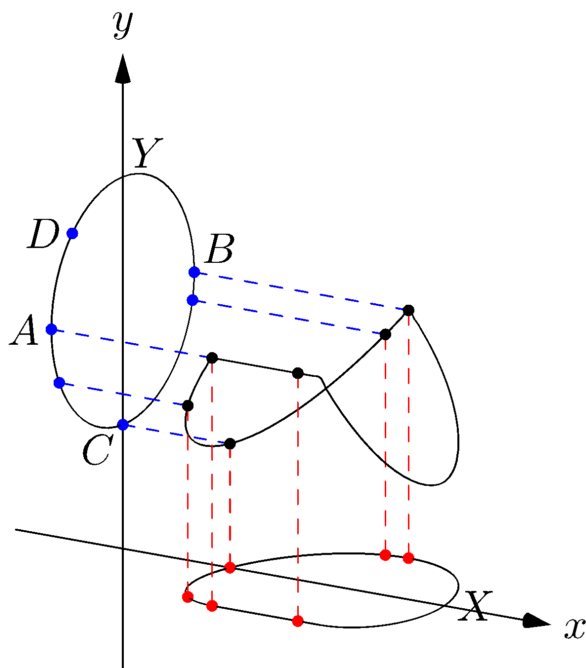
4.1 其他优美的性质

正如上一节所示，黎曼球面 \mathbb{C}_∞ 使我们能够消除亚纯函数的奇点。从非正式的角度讲，这是因为 \mathbb{C}_∞ 是 \mathbb{C} 的一种紧化——通过添加一个点使其紧致——而紧致的黎曼曲面享有许多优美的性质。

命题 16. 设 X 和 Y 均为紧致空间，且 $f: X \rightarrow Y$ 为非恒全纯映射。对于 Y 中的每个点 y ，定义 d_y 为 y 的原像中所有点的总重数，则 d_y 定义良好且恒定。

你可以看出这一命题为何令人惊讶：

例 17 (此命题在紧致的光滑流形中不成立)。考虑如下从紧致实一维光滑流形 X 到 Y 的函数 $f: X \rightarrow Y$ (其图像绘制在带有 x, y 轴的平面上)。(注意，一个紧致的一维流形不能嵌入到 \mathbb{R} 中，因为 \mathbb{R} 的紧子集必闭且有界，从而必有边界。实际上，适当的图形需要在四维空间中呈现，这在视觉上十分困难，因此这里只作近似表示。)



这里， X 与 Y 均同构于单位圆。我们统计 Y 中每个点上方纤维中的点数：

- 在点 A 上，纤维中有无限多个点。
- 在点 B 上，仅有一个点。（你可以认为该点的“重数”为 2。）
- 在点 C 上，有两个点。
- 在点 D 上，纤维为空。

定义 18. 上述值 d_y 称为映射 f 的**次数**，记作 $\deg(f)$ 。

例 19. 映射 $z \mapsto z^k$ 在延拓为 $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 的映射后，其次数为 k 。

若 $t \neq 0$ ，则 t 有 k 个互异的 k 次根；但当 $t = 0$ 时，其原像仅包含点 0 ——在这种情况下，我们希望称 $z = 0$ 为一个“重合点”，这一概念将在下一节中正式定义映射的重数。如果你读过 ??，你会发现这实际上与同调论中定义的次数概念相同——当 X 与 Y 均为黎曼球面时，该次数计算了 $\text{im } f$ 包含了多少个“球形包裹”。但在这里，理论显得更加美妙——不仅图像在同伦意义下等价于覆盖每个点 d 次，而且实际上每个点恰好被覆盖了 d 次！这一主题将在复分析和黎曼曲面中反复出现。基本上：

哲学思考：如果对“事物”进行恰当计数，则结果会非常好。

该命题的证明并不困难——主要观察到，对于形如 $f(z) = z^n$ 的函数，该命题成立，而且在 X 中的每个点 p 附近， f 要么是同构，要么具有上述形式。因此， d_y 在局部恒定，由于 Y 连通，故全局恒定。

4.2 映射的重数

在上一节中，我们非正式地讨论了映射在某一点的重数。本文将对此作严格定义。

例 20. 考虑映射 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 定义为 $f(z) = z^5 + 1$ 。对于 \mathbb{C} 中的每个点 y ，纤维 $f(y)$ 通常有 5 个点，但当 $y = 1$ 时， $f(1) = \{0\}$ 仅包含一个点。

这种现象显然是不理想的，我们希望能够认为函数 f 将 0 点的“5 个重合拷贝”映射到 1 上。（换句话说，对于任一收敛到 1 的点列 $\{y_i\}$ ，存在 5 个不同的点列 $\{x_i\}$ 收敛到 0，使得对每个 i 有 $f(x_i) = y_i$ 。）

受此启发，我们定义重数时要求：

- 对于映射 $z \mapsto z^m$ （其中 $m \geq 1$ 为整数），其重数为 m 。
- 若对定义域或值域进行解析重参数化，则次数保持不变。

事实证明，这两个性质完全刻画了映射的次数！下面给出相应命题。

命题 21. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为在 X 中某点 p 处定义的非恒全纯映射，则存在唯一的整数 $m \geq 1$ ，满足：对于 Y 中以 $f(p)$ 为中心的任一坐标图 $\phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ （即 $\phi_2(f(p)) = 0$ ），存在 X 中以 p 为中心的某个坐标图 $\phi_1: U_1 \rightarrow V_1$ ，使得诱导映射

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}: V_1 \rightarrow V_2$$

的表达形式为 $z \mapsto z^m$ 。

换句话说，一旦固定了 Y 的一个坐标图，就存在 X 的一个（开子集的）坐标图，使得在这些开子集之间诱导的映射为幂函数；而且，这个幂指数与坐标图的选取无关。

哲学思考：每个映射在局部看起来都类似于 $z \mapsto z^m$ 。

证明思路. 主要利用泰勒展开确定 m ，随后由于限制条件， ϕ_1 的选取基本上也被固定。□

定义 22. 上述整数 m 称为 f 在点 p 处的**重数**，记作 $\text{mult}_p(f)$ 。

例 23 (映射在一点处重数的更多例子). 我们再看几个例子：

- 映射 $z \mapsto z^{-2}$ (延拓为 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 的映射) 在 0 点处的重数为 2——可理解为点 0 的“两个拷贝”被映射到 ∞ 。
- 映射 $f(z) = (z-1)(z-2)^5$ 在 $z=2$ 处的重数为 $\text{mult}_2(f) = 5$ ——更一般地，如果 p 是 f 的一个零点，则 $\text{mult}_p(f)$ 就是该零点的重数。
- 映射 $z \mapsto z+1$ 在任意点处的重数均为 1——事实上，对于一个非恒映射，在“大多数”点处其重数都为 1。

以上是正式术语：

定义 24. 若在某点 p 处有 $\text{mult}_p(f) > 1$ ，则称 p 为**分歧点** (ramification point)；此时，点 $f(p)$ 称为**分支点** (branch point)。

4.3 亚纯函数零点与极点的阶数之和

我们再看一个优美的公式。

例 25. 考虑一些从 \mathbb{C}_∞ 到 \mathbb{C}_∞ 的亚纯函数 (通过显然方式延拓自 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的函数)，并列出它们的零点与极点 (计重数)：

函数	零点	极点
5	无	无
$(x+1)^2$	$-1, -1$	∞, ∞
$\frac{1}{x^2+1}$	∞, ∞	$i, -i$
$\frac{x+1}{x+2}$	-1	-2

每次观察，零点的数目总等于极点的数目，这绝非巧合！

命题 26. 设 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为紧致黎曼曲面 X 上的非恒亚纯函数，则有

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

当然，这里需要 X 紧致——毕竟存在从 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的函数，它们可能拥有多个零点而没有极点。

Proof. 将 f 延拓为 $f: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ 后，可以证明 0 的纤维上各点的阶数之和等于 ∞ 的纤维上各点的阶数之和，从而得证。 \square

4.4 Hurwitz 公式

下面给出著名的 Hurwitz 公式，它揭示了全纯映射局部重数与源、目标曲面拓扑性质之间的密切联系。

定理 27 (Hurwitz 公式). 设 $f: X \rightarrow Y$ 为两个紧致黎曼曲面之间的非恒全纯映射，其次数为 $d = \deg(f)$ ，而 g_X 与 g_Y 分别为 X 与 Y 的属，则有

$$2g_X - 2 = d(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

注释 28. 该公式精妙地揭示了映射 f 的局部重数与源曲面和目标曲面的拓扑性质之间的内在联系。

证明思路. 证明主要是局部分析：对于局部形如 $z \mapsto z^m$ 的映射，其局部贡献为 $m - 1$ 。利用全纯映射在紧致曲面上覆盖的性质，对全曲面积分后便可得到该公式。□

4.5 恒等定理

下面的定理是预期中的——在复分析中，全纯函数同样具有这一性质。

定理 29. 设 $f, g: X \rightarrow Y$ 为黎曼曲面之间的全纯映射。如果在 X 的某个非空开子集上有 $f = g$ ，则必有 $f = g$ （即在整体 X 上恒等）。

注意，此处使用了 X 连通的假设——例如，两个复平面的非连接并虽然构成一个光滑的二维流形，但并不是黎曼曲面。换句话说，

哲学思考：全纯映射具有刚性——一个函数在一个微小子集上的取值决定了它在整个定义域内的取值。