Informal Notes on Mathematics

2022.04.05

首先留个印迹，防止以后忘了：以下是一些很 trivial 的命题，但我现在学的准备不够

① Fréchet 导数和复可微

显然，要承接3月23日笔记。一个判断是否复可微的要素显然要求 $\lim_{h\to 0}$ 是从"各个方向"趋于0，这个各个方向有些不便理解。如果是一元函数的话，左极限、右极限是可以通过图像来看的。或者说从数值上趋近也方便理解。验证各个方向可就不好说。(刚刚那么一想，似乎 $f(z)=\bar{z}$ 不解析还是很好理解的：

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h}$$

从实轴：令 $h=c+0i$，$c\to 0$，$z=a+bi$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h} = \lim_{c\to 0}\frac{(a-bi+c)-a+bi}{c}$$

$$= \lim_{c\to 0}\frac{c}{c} = 1$$

从虚轴：令 $h=0+di$，$d\to 0$，$z=a+bi$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h} = \lim_{d\to 0}\frac{(a-(b+d)i)-a+bi}{di}$$

$$= \lim_{d\to 0}\frac{-di}{di} = -1$$

从对角线方向：令 $h=c+ci$，$c\to 0$，$z=a+bi$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h} = \lim_{c\to 0}\frac{(a+c)-(b+c)i-a+bi}{c+ci}$$

$$= \lim_{c\to 0}\frac{c-ci}{c+ci} = -i$$

显然不同方向极限值不同，$f(z)=\bar{z}$ 不可微）

函数 $f(z)$ 在点 z_0 处可微的一个充分必要条件是 u、v 在点 (x_0,y_0) 处 Fréchet 可微，且 Cauchy-Riemann微分方程成立：

$$u_x = v_y,\quad u_y = -v_x.$$

此时有 $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)$，这里 $z=x+iy$，$f(z)=u(x+y)+iv(x+y)$

以下是 Fréchet 可微的定义：

(See *https://www.math.ttu.edu/~klong/5311-spr09/diff.pdf*)

The Frechet derivative Df of $f: V\to U$ is defined implicitly by

$$f(x+k) = f(x) + (Df)\,k + o(\|k\|).$$

To establish the relationship to the Gateaux differential, take $k=\epsilon h$ and write

$$f(x+\epsilon h) = f(x) + \epsilon(Df)h + h\,o(\epsilon).$$

In the limit $\epsilon\to 0$, we have $(Df)\,h = d_h f$. Then, if $d_h f$ has the form $A\,h$, then we can identify $Df = A$.

Let V and W be normed vector spaces, and $U \subseteq V$ be an open subset of V. A function $f : U \to W$ is called *Fréchet differentiable* at $x \in U$ if there exists a bounded linear operator $A : V \to W$ such that

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_W}{\|h\|_V} = 0.$$

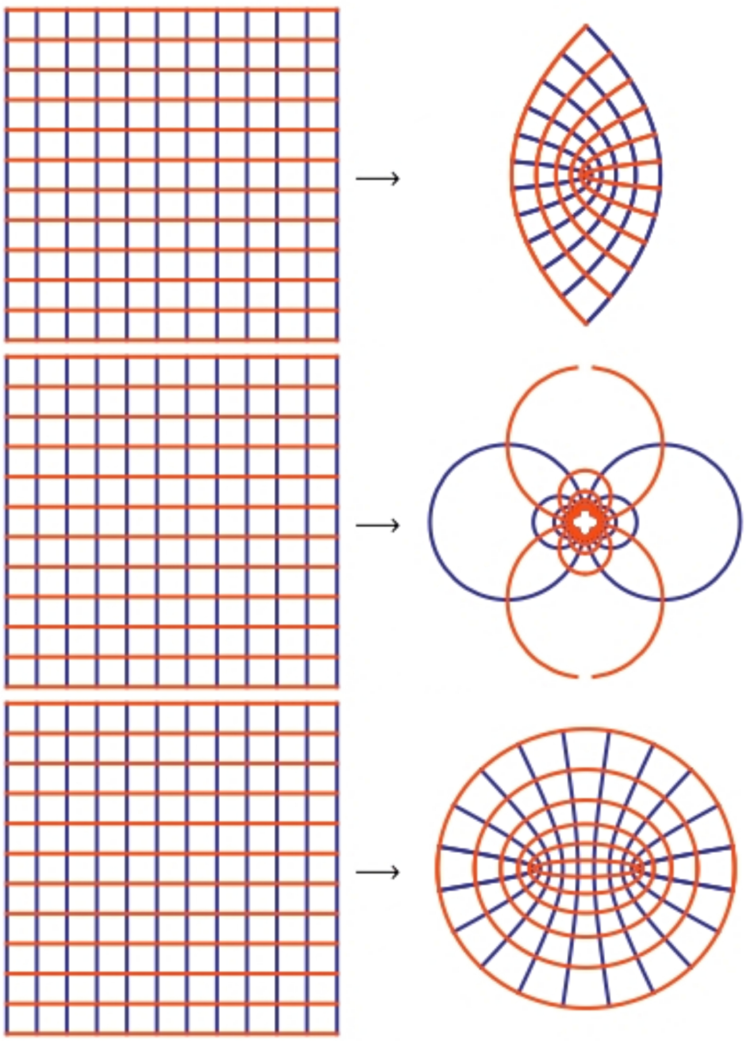
The limit here is meant in the usual sense of a limit of a function defined on a metric space (see Functions on metric spaces), using V and W as the two metric spaces, and the above expression as the function of argument h in V. As a consequence, it must exist for all sequences $\langle h_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ of non-zero elements of V that converge to the zero vector $h_n \to 0$. Equivalently, the first-order expansion holds, in Landau notation

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h).$$

If there exists such an operator A, it is unique, so we write $Df(x) = A$ and call it the *Fréchet derivative* of f at x.

其实有些故弄玄虚了似乎。但毕竟用向量和矩阵定义都是一个东西，而且暂时抛开这东西也未尝不可，之前有些困惑的东西这么一写也都明白得差不多了。但考虑到线代和多元微积分对这玩意作用还是很大，为了防止日后出问题，复分析什么的暂且放一放。

另：关于如何画复函数的图像似乎也是个有趣的问题，这显然将是"四维"的图像，我们当然没法用绘图器绘出四维的东西，因此我们会从中找出某些特定的、我们感兴趣的性质用平面图展现出来。以下是我用WA画的几个函数，分别是 $f(z) = z^2$，$f(z) = \frac{1}{z}$，$f(z) = \sin z$。它是用方格的形变来体现的；这也是常用方法。注意到这种形变是保留垂直的，即原来的直角形变后仍是直角（也许我猜错了）。相关内容似乎在 Needham 的 VCA 中有所提及，但是是后话了。
（有一说一，这真是本好书；尽管运动群内容太多了让我不太舒服）



② Hessian矩阵与Taylor展开(多元)及极值问题

说实在的，Hessian矩阵与Taylor展开及极值的二阶导的关系我早知道了，但一直没深究也没兴趣，那些都是推广出来的结果，相对好理解。现在又突然把它拎出来主要是前天处理一个很普通的均值不等式证明题，我一时兴起用拉格朗日乘数找到满足题干的特解。但很显然用拉乘只是必要条件，你得证明找出来的那组特解的情况下有局部极小值，也就是对带约束的极值问题进行二阶导检验。显然我的任何一本教科书上都没告诉我怎么检验拉乘，我只好去网上找相关笔记，一份CMU的笔记告诉我有一个叫borered Hessian的东西，可以这样用：

Theorem 1. *Suppose $f, g_1, \ldots, g_m$ are second differentiable functions in the variables $x_1, \ldots, x_n$, and that $(a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ is a critical point of $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f - \sum_{i=1}^{m} yg$. Suppose further that the set of vectors $\{\nabla g_i(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq i \leq m\}$ are linearly independent. If the **last** $n - m$ principal minors of the bordered Hessian $H(a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ (the Hessian of $\mathcal{L}$ at the above critical point) is such that the smallest minor has sign $(-1)^{m+1}$ and are alternating in sign, then $(a_1, \ldots, a_n)$ is a local constrained maximum of f subject to the constraints $g_i = 0$.*[1]

但是这里只给了局部极大值的检验：给出"不可约"的条件个数m，检验矩阵的最小子式行列式的值的符号是否与$(-1)^{m+1}$相同。（显然找$-f(x)$的局部极大值就可以知道$f(x)$的局部极小值，但当时没想到）于是我又找到一种方法，检验子式的行列式符号是否与$(-1)^m$相同。（这么看两种方法似乎显然是一样的…是不是还有别的约束条件我也忘了，日后再说吧）也许日后会探求一下这种做法的原理，先放在这。那道题的过程附在笔记末。

③ 有限域上多项式的因式分解和 Galois 理论

起因是我和华东师范的LZY在他的高中校友群里谈家常，突然一位群友提到一个初一的因式分解题，显然不能在有理数范围内分解：$(x-3)^2-3x+6$
整理一下是 $x^2-9x+15$。当时我心血来潮，说题干没强制在哪个域上吧，那我在 GF(11) 上分解出 $(x+3)(x+5)$ 不也行吗。然后在LZY建议下又在GF(2)上得出 x^2+x+1，以下诸如此类。
问题就在于怎么分解，毕竟关于有限域我是一点不会，但大概有些直觉，罗列些自己的猜测：

(i) GF(p) 就是在加法群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上赋予了乘法等运算

(ii) 单项式 ax^n $(a<p)$ 与 $(a-p)x^n$ 在处理时等价（废话）

(iii) 多项式与什么样式子同余或有什么因式与常数项的因数有莫大关系（如果(i)成立那么显然，
比如 $x^2-9x+15$ 在 GF(3) 上分出 x^2，在 GF(5) 上分出 $x(x+1)$，
$\frac{x^2+114514+15}{x^2-8x+114514}$ 在 GF(2) 上等于 $\frac{x^2+1}{x^2}$，$\frac{x^2+114514x+14}{x^2-8x+114514}$ 在 GF(2) 上等于1. etc.

现在看看好像都挺显然的。不管怎么说想深入学的话往后推推，毕竟我学抽代什么的学一节忘十节。

以下是那道用Bordered Hessian的题

已知 $a, b, c > 0$，$a+b+c = ab+bc+ca$. 求证：
$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} - \sqrt{abc} \geq 2$

令 $f(a,b,c)=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\sqrt{abc}$，$g(a,b,c)=a+b+c-ab-ac-cb=0$

$\therefore$ 构造函数 $F(a,b,c,\lambda)=f+\lambda g$

令 $\nabla F=0$

即
$$\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{abc}+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{2a}+\lambda(1-b-c)=0\\[2ex] \dfrac{-\sqrt{abc}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}{2b}+\lambda(1-a-c)=0\\[2ex] \dfrac{-\sqrt{abc}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{2c}+\lambda(1-a-b)=0\\[1ex] a+b+c-ab-bc-ca=0\end{cases}$$

易知 $a=b=c=1$ 是上方程组一个特解

构造函数F的 Hessian 矩阵 $H(F)$，用 x 表示数组 $[a,b,c]$

$$H(F)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2F}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial\lambda\partial x}\\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2F}{\partial\lambda\partial x}\right)^T & \dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\partial g}{\partial a} & \dfrac{\partial g}{\partial b} & \dfrac{\partial g}{\partial c}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial a} & \dfrac{\partial^2F}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial a\partial b} & \dfrac{\partial^2F}{\partial a\partial c}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial b} & \dfrac{\partial^2F}{\partial b\partial a} & \dfrac{\partial^2F}{\partial b^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial b\partial c}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial c} & \dfrac{\partial^2F}{\partial c\partial a} & \dfrac{\partial^2F}{\partial c\partial b} & \dfrac{\partial^2F}{\partial c^2}\end{bmatrix}$$

当 $x=[1,1,1]$ 时，
$$H(F)=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0\\ -1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

此时 $H(F)$ 的唯一子式为

$$H_m(F)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{64} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16}\\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\det H(F)=-\frac{3}{16}$，$\det H_m(F)=-\frac{27}{4096}$

$\because$ 只有一个约束条件 $\therefore$ $m=1$ $\therefore$ $(-1)^m=-1$

$\because$ $\det H(F)$、$\det H_m(F)$ 均与 $(-1)^m$ 同号

$\therefore$ 即此时 f 有局部极小值 2

$\therefore$ 在题目条件下，有 $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\sqrt{abc}\geqslant 2$