INFORMAL NOTES ON MATHEMATICS

2022.04.12 Linear Algebra (continued)

Follow 4.11's notes. We mainly give some definitions.

Definition 1
*A **unit vector** is a vector with length 1. We write a unit vector as* $\hat{\mathbf{v}}$.

Definition 2 *(Kronecker delta)*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

We have

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

So the Kronecker delta represents an identity matrix.

Definition 3 *(Einstein's summation convention)*
Consider a sum $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum x_i y_i$. *The **summation convention** says that we can drop the* $\sum$ *symbol and simply write* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$. *If suffixes are repeated once, summation is understood.*
Note that i *is a dummy suffix and doesn't matter what it's called, i.e.*
$x_i y_i = x_j y_j = x_k y_k$ *etc.*

The rules of this convention are:
(i) Suffix appears once in a term: free suffix
(ii) Suffix appears twice in a term: dummy suffix and is summed over
(iii) Suffix appears three times or more: *WRONG!*

Definition 4 *(rank)*
定义矩阵的列秩（column rank）等于其线性无关的列数，行秩（row rank）等于线性无关的行数．由于任意的矩阵的行秩和列秩相等，可以直接称为矩阵的秩（rank）．

要确定任意矩阵秩的大小，我们可以先用*高斯消元法*将矩阵变换为梯形矩阵．矩阵的秩数就是梯形矩阵中不为零的行数．这是因为行变换不会改变矩阵的秩．
这里我们还是认真看看4.9笔记一笔带过的高斯消元法

Definition 5

高斯消元法的一般步骤如下：

- 先处理第 $i=1$ 行，如果 $a_{1,1}=0$ 但某 $i'>1$ 的行有 $a_{i',1}\neq 0$，就先进行行变换[4] $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_{i'}$．如果第一列全为 0，我们就无视第 1 列，从第 2 列重新开始，以此类推．记此时第 1 行第一个非零元的列标为 $q(1)$．接下来做若干次行变换 $\mathbf{r}_{i'}+\mathbf{r}_1\times k$ 使所有第 $i'>1$ 行的 $a_{i',p(1)}$ 都为 0．
- 依次处理第 $i=2\ldots m-1$ 行[5]．要处理第 i 行，先令 $q(i)=q(i-1)+1$，如果此时矩阵元 $a_{i,q(i)}=0$，但某 $i'>i$ 的行有 $a_{i',q(i)}\neq 0$，就先进行行变换 $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_{i'}$．若不存在这样的 i'，我们就改令 $q(i)=q(i-1)+2$ 并重新开始该步骤，以此类推．接下来做若干次行变换 $\mathbf{r}_{i'}+\mathbf{r}_i\times k$ 使所有第 $i'>i$ 行的 $a_{i',p(i)}$ 都为 0．

Corollary 1 *解的数量*

根据以上步骤，当系数矩阵变为梯形矩阵后，可以用以下步骤判断解的数量：

1. 若存在系数 $a_{i,j}$ 全为零的行 i，但是对应的常数 y_i 却不为零，则方程组无解．
2. 若存在 d 个系数 $a_{i,j}$ 全为零的行 i，且对应的所有 y_i 也都为零，则方程有无穷个解，且需要 d 个任意常数来表示所有可能的解．
3. 若不存在系数 $a_{i,j}$ 全为零的行，则系数矩阵可以化为三角矩阵，使对角线上的元素全不为零．此时方程有唯一解．

Corollary 2 *解的结构*

按照高斯消元法的一般步骤，如果方程有解，我们总可以将解表示为一些常矢量的线性组合加上一个常矢量．

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{d} c_i\mathbf{x}_i+\mathbf{x}_0 \tag{18}$$

其中 c_i 是 d 个任意常数（当方程有唯一解时 $d=0$），无论这些常数取什么值，$\mathbf{x}$ 都是方程的解．另一方面，给出方程的任意一个解，总能找到一些常数 c_i 与之对应．式 18 叫做方程的**通解**（**general solution**），通解中的任意一个就做方程的**特解**（**special solution**）．

*综上所述，对于任意有解的**非齐次（inhomogeneous）**方程组 Ax=y，我们可以将通解从形式上理解为齐次方程组 Ax=0 的通解与非齐次方程组的任一特解相加.*

Definition 6 *(Transpose of matrix)*

*If A is an $m\times n$ matrix, the **transpose** A^T is an $n\times m$ matrix defined by $(A^T)_{ij}=A_{ji}$.*

Definition 7 *(Hermitian conjugate)*

Define $A^\dagger=(A^T)^*$. Similarly, $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$.

Definition 8 *(Symmetric matrix)*

*A matrix is **symmetric** if $A^T=A$*

Definition 9 *(Skew-Hermitian matrix)*
A matrix is ***skew-Hermitian*** *if* $A^\dagger = -A$. *The diagonals are pure imaginary.*

Definition 10 *(Trace)*
The ***trace*** *of an* $n \times n$ *matrix* A *is the sum of the diagonal.* $\mathrm{tr(A)} = A_{ii}$.

Definition (Linearly independent vectors). A set of vectors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \cdots \mathbf{v}_m\}$ is *linearly independent* if

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow (\forall i)\, \lambda_i = 0.$$

Definition (Spanning set). A set of vectors $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ is a *spanning set* of $\mathbb{R}^n$ if

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\exists \lambda_i) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{x}$$

Definition (Basis vectors). A *basis* of $\mathbb{R}^n$ is a linearly independent spanning set. The standard basis of $\mathbb{R}^n$ is $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots 0), \cdots \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$.

Definition (Orthonormal basis). A basis $\{\mathbf{e}_i\}$ is *orthonormal* if $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ if $i \neq j$ and $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ for all i, j.

Using the Kronecker Delta symbol, which we will define later, we can write this condition as $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Definition (Dimension of vector space). The *dimension* of a vector space is the number of vectors in its basis. (Exercise: show that this is well-defined)