INFORMAL NOTES ON MATHEMATICS

2022.06.28

Куобье дуожи, Деар Нотес. Меицуан дао чжонкао цзинрань ченлэ этот Мойан. Тодай ран мы цон цзиофэнь кайши ба. Щиван вое жхинюс руюань.

积分的技巧整理

1. 积分表（参前）
2. 分项积分法

$$\int [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx$$

若分母内为多项式，需要部分分式法处理

Lu.1. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx$

$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right)$

$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C$

$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Lu2. $\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx$

对分母进行处理： $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$

令 $t = x+\frac{p}{2}$ $\therefore dx = dt$, $x = t-\frac{p}{2}$

易证 $mx+n = At+B$，有 $A = m$, $B = n-\frac{1}{2}mp$

令 $q-\frac{p^2}{4} = \pm a^2$ （符号视左侧正负决定）

$\therefore$ 原积分 $= \int \frac{At+B}{t^2\pm a^2}\,dt$ $\left[A\int \frac{t}{t^2\pm a^2}\,dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2\pm a^2)}{t^2\pm a^2} = \frac{A}{2}\ln|t^2\pm a^2| + C \right]$

$$= \begin{cases} \frac{A}{2}\ln|t^2+a^2| + \frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a} + C & (q-\frac{p^2}{4} > 0) \\ \frac{A}{2}\ln|t^2-a^2| + \frac{B}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C & (q-\frac{p^2}{4} < 0) \end{cases}$$

看来是用了微分算子代换。之前的laugzu教科书上没有，看来得自己猜了。

$f'(x)\,dx = d[\int f'(x)\,dx]$

$= d[f(x)]$

$(\frac{df}{dx}\cdot dx = df)$

此步即 $t\,dt = 1\cdot d(\frac{t^2}{2}+C)$

$= \frac{1}{2}d(t^2+C)$

[这里顺路就算子多说几句：

$\because \frac{df}{dx} = f'(x)$ $\therefore \frac{d(f+g)}{dx} = (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x) = \frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$

$\therefore d(f+g) = df+dg$ 同理 $d(fg) = g\,df + f\,dg$

$\therefore d(cf) = c\,df$ （若 $g(x) = c$, $\frac{dg}{dx} = 0$, $dg = 0$）

似乎还没有完全解决，等以后再用的时候再想吧]

Lu3. $\int \frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1}\,dx$

错误案例：设 $\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1}$

原因：暂不均说明。先重回看一个例子再说。

例4. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$

此时分解出 $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$，理由是 $(x-1)$ 出现两次

我理解是其实相当于 $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x-1)^2}$，也就是重复出现的因式降次只能降一次，

比如 $x^3(x-2)^2$ 分解出 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$，

其实也相当于分成 $\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3}+\frac{Dx+E}{(x-1)^2}$

之所以这么做我想应该和域论有关，但显然没有书中解释。域论暂时先放放。

那么我们回头看例3就显然了。$\frac{C}{x^2+1}$ 降了两次，（也许这使域缩小了求诸如此类）

也许可以把 x^2+1 视作 $(x+a)(x+b)$，如果单拆这个式子，将得到

$\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}$，如果直接以 C 取代，其实就是在强制使 $A+B=0$，

这显然不合适。[这种解释似乎更好，但反过来解释例4似乎就不行]

好，还是规规矩矩做一题再说：

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=A\ln|x+1|+B\ln|x-1|+\left(-\frac{C}{x-1}\right)+C$$

算出 A、B、C 值

$3x+5=A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)$

令 $x=0$，有 $A-B+C=5$

令 $x=1$，有 $2C=8$

令 $x=-1$，有 $4A=2$

$\therefore A=\frac{1}{2}$，$C=4$，$B=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 上式 $=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

3. 分部积分法

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \quad \left(\int uv'dx=uv+\int vu'dx\right)$$

例5. 求 $\int(2x^3+3x^2+4x+5)e^x\,dx$

令 $u=2x^3+3x^2+4x+5$，$dv=e^x$ $\therefore v=e^x$

$\therefore \int u\,dv=uv+\int v\,du$

$=(2x^3+3x^2+4x+5)e^x-\int e^x(6x^2+6x+4)\,dx$

不断重复套用得 $e^x\cdot(2x^3+3x^2+4x+5-6x^2-6x-4+12x+6-12)$

$=e^x\cdot(2x^3-3x^2+10x-5)$

由此启得分部积分推广式：

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} u^{(i)}v^{(n-i)} \cdot (-1)^n\right) + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$$

主要适用于：$\int P(x)e^{ax}dx$，$\int P(x)\sin(x)\,dx$，$\int P(x)\cos x\,dx$

例 6、求 $\int \ln x\,dx$

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot(\ln x)'dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx + C$$
$$= x\ln(x) - x$$

4、换元法

令 $x = \varphi(t)$，$dx = \varphi'(t)\,dt$

$\therefore$ $$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

例 7. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

~~这就没有必要严格按~~ (1) 来了

令 $t = \sin x$ $\therefore$ 原式 $= \int t^3 t'\,dx$
$$= \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C$$

代换回来 原式 $= \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$

例 8. $\int \sin^3 x\,dx$

令 $t = \cos x$，原式 $= \int(-\sin^2 x)(-\sin x)\,dx$
$$= \int t^2 - 1\,dt$$
$$= \frac{t^3}{3} - t + C$$
$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

例 9. 求 $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

令 $x = a\cos t$，$dx = -a\sin t\,dt$

$\therefore$ 原式 $= -a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sin t\,dt$
$$= -a^2\int \sin^2 t\,dt$$
$$= -a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$
$$= -\frac{a^2}{2}t + a^2\frac{\sin 2t}{4} + C = -\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C$$

$\because$ $x = a\cos t$ $\therefore$ $t = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{a^2}{2}\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$

问题保留：

正确答案是 $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

替换是 $x = a\sin t$，$dx = a\cos t\,dt$

暂时没有找出这个过程错在哪。

现在临时起意换一本教材了：

1. 第一换元法

就是一开始说的（猜的）代换微分算子 dx 的惯用手段

(1) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$

⇒ 这一步选择降 cos 的次，是因为在三角函数中最容易处理的是偶数项，奇数项难以处理。

$= \int \sin^2 x \cos^4 x \, d\sin x$

$= \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 d\sin x$

$= \int \sin^6 x - 2\sin^4 x + \sin^2 x \, d\sin x$

$= \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

(2) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^{100}}$

$= \int \frac{x-1}{(x-1)^{100}} dx + \int \frac{1}{(x-1)^{100}} dx$

$= \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^{99}} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^{100}}$

$= -\frac{1}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C$

(3) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx$

$= \int \sqrt{\arctan x} \, d\arctan x$

$= \frac{2}{3} \arctan^{\frac{3}{2}} x + C$

2. 第二换元法

见上一页。一般有以下情况：

(i) 无理根式化为有理式

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}$

令 $t = \sqrt[6]{x+1}$，$\therefore x = t^6 - 1$，$dx = 6t^5 dt$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{6t^5}{t^3 - t^2} dt$

$= 6\int \frac{t^3}{t-1} dt$

$= 6 \times \frac{t^3}{3} + 6 \times \frac{t^2}{2} + 6t + 6\int \frac{1}{t-1} d(t-1)$

$= 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1|$

$= 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln|\sqrt[6]{x+1} - 1| + C$

一般规律：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令 $x = a\sin t$

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令 $x = a\tan t$

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令 $x = a\sec t$

(ii) 三角函数换元

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

令 $x = a\tan t$，$dx = a\sec^2 t$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{\sec^2 t}{\sec^2 t} dt$

$= \int \sec t \, dt$

$= \ln|\sec t + \tan t| + C'$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C'$

$= \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

(iii) 当分母阶较高时，可用倒代换 $x = \frac{1}{t}$

(1) $\int \frac{1}{x(x^7+2)} dx$ $dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t^7}+2)} dt = -\int \frac{t^6}{1+2t^7} dt$

$= -\frac{1}{7}\int \frac{1}{1+2t^7} dt^7$

$= -\frac{1}{14}\ln|1+2t^7| + C$

$= -\frac{1}{14}\ln|x^7+2| + \frac{1}{2}\ln|x| + C$