INFORMAL NOTES ON MATHEMATICS

2022.07.10

又是上高中课程的一天

定理：若 $\vec{a},\vec{b}$ 是平面上两个不共线的非零向量，那么任意向量 $\vec{c}$ 都可以唯一地写成 $x\vec{a}+y\vec{b}$ 的样子，其中 x,y 是两个实数

1. 若 $\vec{a},\vec{b}$ 是平面上不共线的非零向量，$\vec{c},\vec{d}$ 满足 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，$\vec{d}=z\vec{a}+w\vec{b}$，求 $\vec{c}\cdot\vec{d}$

如果加上条件 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 呢？

解：$\vec{c}\cdot\vec{d}=(x\vec{a}+y\vec{b})(z\vec{a}+w\vec{b})$

$=xz|\vec{a}|^2+yw|\vec{b}|^2+(xw+yz)\vec{a}\cdot\vec{b}$

若满足条件，$\vec{c}\cdot\vec{d}=xz+yw$

定义 169 (平面直角坐标系). 在平面上固定两个向量 $\vec{i},\vec{j}$ 满足 $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, 且 $\vec{i}\perp\vec{j}$, 那么平面上任意一个向量 $\vec{a}$ 都可以表示为 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 的形式, 其中 x,y 是两个实数. 而且对任意两个实数 x,y, 也存在一个唯一的向量 $\vec{a}=x\vec{i}+b\vec{j}$. 于是我们可以将所有平面向量 $\vec{a}$ 和所有二元有序数对 (x,y) 一一对应起来. 我们将 (x,y) 称作 $\vec{a}$ 的坐标表示, $\{\vec{i},\vec{j}\}$ 被称作一组平面直角坐标系的基底.

(实际上，基底同样可以选择不垂直的向量，这就是斜坐标系)

1. 若 $\vec{a}=(x,y)$，$\vec{b}=(z,w)$，求 $\vec{a}+\vec{b}$

解：$\vec{a}+\vec{b}=(x\vec{i}+y\vec{j})+(z\vec{i}+w\vec{j})$

$=(x+z)\vec{i}+(y+w)\vec{j}$

$=(x+z,\ y+w)$

2. 若 $\vec{a}=(x,y)$，λ 为实数，求 $\lambda\vec{a}$

解：$\lambda\vec{a}=\lambda(x\vec{i}+y\vec{j})$

$=(\lambda x)\vec{i}+(\lambda y)\vec{j}$

$=(\lambda x,\ \lambda y)$

3. 若 $\vec{a}=(x,y)$，$\vec{b}=(z,w)$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

解：见上

4. 若 $\vec{a}=(x,y)$，计算 $|\vec{a}|$

解：$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

5. 若 $\vec{a}=(x,y)$，$\vec{b}=(z,w)$，计算夹角

解：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\dfrac{xz+yw}{\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)}}$

2. 用向量证明 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

解：$\vec{x}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{y}=(\cos\beta,\sin\beta)$

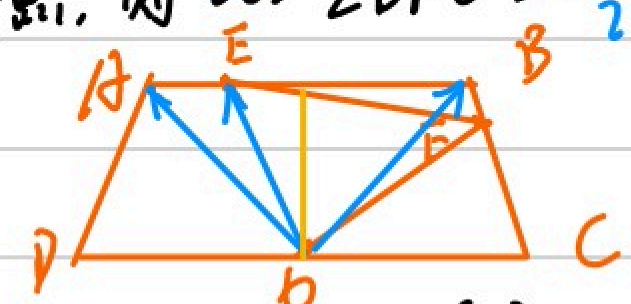
$\therefore \cos\theta=\cos(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

$=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1\times1}}$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin$

3. 如图在等腰梯形ABCD中，$AD=BC=AB=\frac{1}{2}DC=2$，点E、F分别为线段AB、BC的三等分点，O为DC的中点，则 $\cos\angle EFO=\frac{1}{2}$



以O为原点，OC为x轴建系，$\because A(-1,\sqrt{3})$，$B(1,\sqrt{3})$，$C(2,0)$，$D(-2,0)$

$\therefore \vec{OE}=\frac{2}{3}\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{OB}$ (见上次笔记)

($\vec{AE}=\lambda\vec{AB}$，则 $\vec{OE}=(1-\lambda)\vec{OA}+\lambda\vec{OB}$)

$=(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3})\vec{i}+(\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3})\vec{j}$

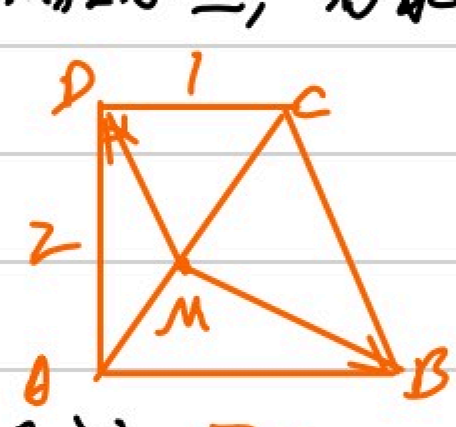
$=(-\frac{1}{3},\sqrt{3})$

同理 $\vec{OF}=\frac{2}{3}\vec{OB}+\frac{1}{3}\vec{OC}=(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\sqrt{3})$

$\therefore \vec{EF}=\vec{OF}-\vec{OE}=(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\sqrt{3})$

$\therefore$ 由夹角公式可得 $\cos\angle EFO=\frac{1}{2}$

4. 已知在直角梯形ABCD中，$AB=AD=2CD=2$，$AB\parallel CD$，$\angle ADC=90^\circ$，若M在AC上，则求 $|\vec{MB}+\vec{MD}|$ 的取值范围



解：$\vec{AC}=(1,2)$

$\vec{AM}=(\lambda,2\lambda)$

$\vec{AB}=(2,0)$，$\vec{AD}=(0,2)$

$\therefore \vec{MB}=\vec{AB}-\vec{AM}=(2-\lambda,-2\lambda)$

$\vec{MD}=\vec{AD}-\vec{AM}=(-\lambda,2-2\lambda)$

$\therefore \vec{MB}+\vec{MD}=(2-2\lambda,2-4\lambda)$

$|\vec{MB}+\vec{MD}|=2\sqrt{(1-\lambda)^2+(1-2\lambda)^2}$

$=2\sqrt{5(\lambda-\frac{3}{5})^2+\frac{1}{5}}\in[\frac{2}{5}\sqrt{5},2\sqrt{2}]$

$(\lambda\in[0,1])$

熟知的公式是所谓直觉的一部分——于品

好，现在我们可以开始数学分析了。

(F) 域公理：$\mathbb{R}$ 是一个域

(F1) 加法结合律：$x+(y+z)=(x+y)+z$。

(F2) 加法交换律：$x+y=y+x$。

(F3) 存在加法单位元：存在 $0\in\mathbb{R}$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，$0+x=x$ 成立。

(F4) 加法逆元的存在性：对任意 $x\in\mathbb{R}$，存在 $-x\in\mathbb{R}$，使得 $x+(-x)=0$。

练习. 证明，加法逆元 $-x$ 是唯一的，即如果 $x'\in\mathbb{R}$ 也满足 $x+x'=0$，那么 $x'=-x$。

$x+x'=0 \Rightarrow x+x'+(-x)=-x \Rightarrow x'=-x$

注记. 如果假定 *(F1)-(F4)* 成立，按照通行的代数学的概念，$(\mathbb{R},+)$ 被称作是一个（交换）群。我们强调 $-x$ 目前只是一个记号。根据俗套的约定，我们把 $x+(-y)$ 简写成 $x-y$。

(F5) 乘法结合律：$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$。

(F6) 乘法交换律：$x\cdot y=y\cdot x$。

(F7) 存在乘法单位元：存在 $1\in\mathbb{R}$，使得 $1\neq 0$ 并且对任意 $x\in\mathbb{R}$，$1\cdot x=x$ 成立。我们还要求 $1\neq 0$，从而 $\mathbb{R}$ 中至少有两个元素。

(F8) 乘法逆元的存在性：对任意 $x\in\mathbb{R}-\{0\}$，存在 $x^{-1}\in\mathbb{R}$，使得 $x\cdot x^{-1}=1$。

练习. 证明，$x\neq 0$ 乘法逆元 x^{-1} 是唯一的，即若 $x'\in\mathbb{R}$ 也满足 $x\cdot x'=1$，那么 $x'=x^{-1}$。

$xx'=1 \Rightarrow xx'x^{-1}=x^{-1} \Rightarrow 1\cdot x'=x^{-1} \Rightarrow x^{-1}=x'$

注记. *(F5)-(F9)* 这四条公理表明 $(\mathbb{R}^{\times}:=\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ 是一个（交换）群。我们强调 x^{-1} 只是一个记号。根据约定，我们把 $x\cdot y^{-1}$ 也记作 $\dfrac{x}{y}$。另外，有时候我们还省略掉 $\cdot$ 把 $x\cdot y$ 写成 xy。

(F9) 乘法分配律：$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$。

注记. 假定 *(F1)-(F7)* 以及 *(F9)* 这八条，我们就称 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 是一个（交换）环；满足这九条公理的 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 被称作是一个域。

注记（空间的概念.）. 上面的定义具有下述的模式，首先固定一个集合 $X=\mathbb{R}$，然后在 X 上加上额外的结构，比如说加法结构 $+:X\times X\to X$，当然，我们对这个额外的加法结构也可以做一些要求，比如说满足 *(F1)-F(4)* 等；我们还可以加更多的结构，比如还要求 X 上有乘法结构 $\cdot:X\times X\to X$ 并且对这些结构之间的关系也有限定（比如说 *(F9)*）。在数学中，所谓的**空间**通常指的是一个配备了某些结构的集合 X。

练习. *1)* 证明，对任意的 x,y，如果 $b\neq 0$，我们有

$$x+a=y+a\Rightarrow x=y;\quad x\cdot b=y\cdot b\Rightarrow x=y.$$

2) 证明，对任意的 x,y,z,w，如果 $y\neq 0$，$w\neq 0$，那么我们有

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{xw+zx}{yw},\quad \frac{x}{y}\cdot\frac{z}{w}=\frac{x\cdot z}{y\cdot w}.$$

3) 证明，对任意非零的 x 和 y，我们有

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}=\frac{y}{x}.$$

4) 证明，$(-1)\cdot x=-x$。据此，进一步证明 $(-x)\cdot y=-(xy)$，$(-x)\cdot(-y)=xy$。

（提示：利用 $x+(-1)\cdot x=1\cdot x+(-1)\cdot x$）

1) $x+a=y+a\Rightarrow x+a+(-a)=y+a+(-a)\Rightarrow x=y$

$x\cdot b=y\cdot b\Rightarrow x\cdot b\cdot b^{-1}=y\cdot b\cdot b^{-1}\Rightarrow x=y$

2) $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=x\cdot y^{-1}+z\cdot w^{-1}=x\cdot y^{-1}(w\cdot w^{-1})+zw^{-1}(y\cdot y^{-1})=(xw+zy)\cdot(w^{-1}y^{-1})=\frac{xw+zx}{yw}$

3) $(\frac{x}{y})(\frac{y}{x})=\frac{xy}{yx}=1$，由(F8)及其后结论可得 $(\frac{x}{y})^{-1}=\frac{y}{x}$

4) $x+(-1)\cdot x=1\cdot x+(-1)\cdot x=0x=0\quad\therefore(-1)x=-x$

(O) 序公理：$\mathbb{R}$ **是有序域**

(O1) 序的传递性：$x\leqslant y,y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$。

(O2) 序可以决定元素：$x\leqslant y,y\leqslant x\Rightarrow x=y$。

(O3) 全序关系：对任意的 x 和 y，$x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$，二者必居其一（可以都成立）。

(O4) 与加法相容：$x\leqslant y\Rightarrow x+z\leqslant y+z$。

(O5) 与乘法相容：$x\geqslant 0,y\geqslant 0\Rightarrow xy\geqslant 0$。

(A) Achimedes 公理：$\mathbb{R}$ **是 Archimedes 有序域**，即

对任意 $x>0$ 和 y，总存在正整数 n，使得 $n\cdot x\geqslant y$。

思考题. 假设 $a>0$，你是否能证明开区间 $(0,a)$ 是非空的。通过反证法，你就可以看到所谓的 *Dedekind* 分割的影子。*Dedekind* 分割是构造实数的一种手段，我们在后面的课程会讨论。在思考的过程中你也会发现，真正的困难在于，基于目前的公理，我们不清楚 $\mathbb{R}$ 中都有什么样子的元素（目前我们只知道 $0,1,-1\in\mathbb{R}$），所以，能否大量的构造实数是一个很重要的问题。我们课程的一个关键点就是构造 $\sqrt{2}$，e 和 π，这听起来有些无聊，但是中学数学教学从来都没有给出这些数的具体定义（只要求大家必须接受它们的某些性质）。

证明：若 $(0,a)=\varnothing$，即不存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $0<x<a$，由 (A) 公理，得，对于 $a>0$，取 $y\neq na$，有 $na>y$，$a>\frac{y}{n}$，由于 y 是任取的，当 $y>0$ 时，$\frac{y}{n}\in(0,a)$，矛盾，因此 $(0,a)$ 非空（也不知道对不对）

问题保留

练习. *1)* 证明，$x \geqslant 0$ 等价于 $-x \leqslant 0$；$y > 1$ 可以推出 $0 < \dfrac{1}{y} < 1$。进一步证明，$x \geqslant y$ 等价于 $-x \leqslant -y$。

2) 证明，$1 > 0$，$-1 \neq 1$。（提示：如若不然，那么，$-1 > 0$，利用 *(O5)* 就得到了矛盾）

3) 证明，如果 $x \leqslant y$，$a \leqslant 0$，那么 $a \cdot x \geqslant a \cdot y$。

4) 证明，如果 $a \leqslant b$，$x \leqslant y$，那么 $a + x \leqslant b + y$ 并且 $=$ 成立当且仅当 $a = b$，$x = y$；再证明，如果 $0 < a \leqslant b$，$0 < x \leqslant y$，那么 $ax \leqslant by$ 并且 $=$ 成立当且仅当 $a = b$，$x = y$。

5) 给定 $x, y \in \mathbb{R}$，如果对任意的 $a < x$ 都能推出 $a < y$，证明，$x \leqslant y$。

6) 证明，对任意的 $x \in \mathbb{R}$，我们有 $x^2 \geqslant 0$。

7) 证明，如果 $a^2 < a$，那么 $0 < a < 1$。

8) 如果非零实数 x 和 y 的符号相同，证明，$(x+y)^2 > (x-y)^2$。

1) $x \geq 0 \Rightarrow x + (-x) \geq -x \Rightarrow 0 \geq -x$，即 $-x \leq 0$； $y > 1 \Rightarrow y \cdot \frac{1}{y} > \frac{1}{y} \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < 1$

$x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y - x \leq 0 \Rightarrow -x \leq -y$

2) 若不然，则 $1 < 0$，$\Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow (-1)(-1) = 1 \times 1 = 1 > 0$，矛盾； $(1 > 0)$

若不然，则 $1 = -1 \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow 1 + (-1) > 0$ 由于 $1 + (-1) = 0$，矛盾 $(1 \neq -1)$

(实际上卓里奇上也有类似的证明。题外：猜几个俄文译名：(卓里奇书里的)

Колмогоров → 科莫戈洛夫 Арнольд → 阿诺德 (竟然带6转音))

3^0. $0 < 1$.

Proof We know that $1 \in \mathbb{R} \backslash 0$, that is $0 \neq 1$. If we assume $1 < 0$, then by what was just proved,

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow (0 < 1).$$

But we know that for any pair of numbers $x, y \in \mathbb{R}$ exactly one of the possibilities $x < y$, $x = y$, $x > y$ actually holds. Since $0 \neq 1$ and the assumption $1 < 0$ implies the relation $0 < 1$, which contradicts it, the only remaining possibility is the one in the statement of the proposition. □

3) $x \leq y \Rightarrow y - x \geq 0$, $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$ $\therefore (y-x) \cdot (-a) \geq 0 \Rightarrow ax - ay \geq 0 \Rightarrow ax \geq ay$

4) $a \leq b$, $x \leq y \Rightarrow a + x \leq y + a$, $y + a \leq y + b \Rightarrow a + x \leq b + y$ (Part 1)

($\Rightarrow$) 若 $a + x = b + y$ 且 $a \neq b$ $\therefore a < b$ $\therefore a + x - a > b + y - b$，即 $x > y$，矛盾；同理可得 $x = y$ $\therefore a + x = b + y \Rightarrow a = b$，$x = y$

($\Leftarrow$) 显然。 (Part 2) (Part 3,4 略)

5) 若不然，即 $x > y$ $\therefore x - y > 0$ $\therefore$ 开区间 $(0, x-y)$ 非空 $\therefore$ 选取 $t \in (0, x-y)$

$\therefore 0 < t < x - y$，$t + y < x$ $\because t > 0$ $\therefore t + y > y$，矛盾 $\therefore x \leq y$

6) 若 $x \geq 0$，则由 (O5) 得 $x^2 \geq 0$；若 $x \leq 0$，则 $-x \geq 0$，由 (O5) 得 $(-x) \cdot (-x) = x^2 \geq 0$

7) $a^2 \geq 0$，$a > a^2 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$ $\therefore a^2 < a \Rightarrow a^2 \cdot \frac{1}{a} < a \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow a < 1$ $\therefore 0 < a < 1$

8) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy > 0$ $\therefore (x+y)^2 > (x-y)^2$

命题 1. $\mathbb{R}$ 包含所有有理数，即存在单射 $\iota:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$，使得对任意的 $x,y\in\mathbb{Q}$，我们有

$$\iota(x+_{\mathbb{Q}}y)=\iota(x)+\iota(y),\quad \iota(x\cdot_{\mathbb{Q}}y)=\iota(x)\cdot\iota(y),$$

其中 $+_{\mathbb{Q}}$ 和 $\cdot_{\mathbb{Q}}$ 分别为有理数 $\mathbb{Q}$ 上的乘法和加法。映射 $\iota:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 还保持序关系，即对任意的 $x,y\in\mathbb{Q}$，如果 $x\leqslant_{\mathbb{Q}}y$，那么 $\iota(x)\leqslant\iota(y)$，其中 $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ 是有理数上的序。

证明: 首先对于整数 n 定义映射 $\iota(n)\in\mathbb{R}$。我们令

$$\iota(n)=\begin{cases}\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{个}}, & \text{如果 } n>0;\\ 0, & \text{如果 } n>0;\\ \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{-n\text{个}}, & \text{如果 } n<0.\end{cases}$$

实际上，之所以会出现这种看似奇怪的构造，是因为我们并不知道"1"到底是什么，它目前只是个符号。同理，"+"和"×"也是未知的运算。日后的抽代似乎也要适应这种玩法。

不难验证（请同学参考课堂笔记），对任意的 $m,n\in\mathbb{Z}$，我们都有

$$\iota(m+_{\mathbb{Q}}n)=\iota(m)+\iota(n),\ \iota(-n)=-\iota(n),\ \iota(m\cdot_{\mathbb{Q}}n)=\iota(m)\cdot\iota(n).$$

据此，为了验证 ι 是单射，只要说明如果 $\iota(m)=\iota(n)$，则 $m=n$。我们有

$$\iota(m-n)=\iota(m)+\iota(-n)=\iota(m)-\iota(n)=0,$$

按照定义，就有 $k=m-n$（因为对任意的 $k>0$, $\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k\text{个}}>0$, $\overbrace{(-1)+1+\cdots+(-1)}^{k\text{个}}<0$）。对于有理数 $x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$，其中 $p,q\in\mathbb{Z}$，$q\neq0$，我们定义

$$\iota(x)=\frac{\iota(p)}{\iota(q)},$$

其中，因为 p 和 q 是整数，所以 $\iota(p)$ 和 $\iota(q)$ 已经有了定义。当然，x 可以表示为其他的整数的商的形式，比如说，$x=\dfrac{s}{t}$，其中 $s,t\in\mathbb{Z}$，为了说明 $\iota(x)$ 是良好定义的，我们就要说这两种表示所给出的 $\mathbb{R}$ 中的元素是一样的，即证明

$$\frac{\iota(p)}{\iota(q)}=\frac{\iota(s)}{\iota(t)}.$$

所以"良好定义"是什么意思我一直不太清楚。

良定义的意思就是在定义可能有ambiguity的时候，要检查一下给出的定义到底是不是清晰的，是不是有意义的。这个词最常见的用法就是定义映射 $f:X/\sim\to Y$ 的时候，很多情况下是先定义一个 $\tilde{f}:X\to Y$，然后再验证 $\tilde{f}$ 跟代表元的选取无关，从而自然地给出了想要定义的f。

90%的情况下，良定义就是 与代表元选取无关的意思；剩下10%可能出现什么别的数学上的用法我一下子想不起来了。"良定义"这个词毕竟是一个自然语言的词语，不是在形式语言里面通过抽象符号来定义的东西；自然语言里面任何概念都不可能完全限定死它的含义，永远都有外延。

根据整数情况已经证明的结论，我们知道上式等价于

$$\iota(p)\cdot\iota(t)=\iota(q)\cdot\iota(s)\Leftrightarrow\iota(pt)=\iota(qs)\Leftrightarrow pt=qs,$$

其中最后一个等价性用到了 ι 在整数集上是单射，所以 $\iota(x)$ 是良好定义的，从而我们得到了映射

$$\iota:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}.$$

为了说明 ι 是单射，考虑 $\iota(\frac{p}{q})=\iota(\frac{s}{t})$，其中 p,q,s,t 是整数。此时，按照定义，我们有

$$\frac{\iota(p)}{\iota(q)}=\frac{\iota(s)}{\iota(t)}\Rightarrow pt=qs\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{s}{t}.$$

最后，我们把 ι 保持序关系，即说明如果 $\frac{p}{q}>\frac{s}{t}$，那么 $\frac{\iota(p)}{\iota(q)}>\frac{\iota(s)}{\iota(t)}$，其中，我们总能假设 $q>0\ t>0$。由于 $\iota(q)>0$，$\iota(t)>0$（因为对任意的 $k>0$，$\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k\text{个}}>0$），所以 $\frac{\iota(p)}{\iota(q)}>\frac{\iota(s)}{\iota(t)}$ 等价于

$$[\iota(p)\cdot\iota(t)>\iota(q)\cdot\iota(s)\Leftrightarrow\iota(pt-qs)>0.$$

后者是显然的，因为 $pt-qs>0$。 □

练习. 有了以上的各种准备和经验，我们就不难证明

1) 证明，利用 $\mathbb{R}$ 中的 n 的定义，我们有 $n\cdot x = nx$，$n\cdot x = nx$。(先证明在 $\mathbb{R}$ 中，我们有 $n\cdot x = \overbrace{x+x+\cdots+x}^{n个}$，其中 $n>0$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个自然数)。

2) 证明，对于任意的 $a<b$，(a,b) 有无限多个元素。(提示：我们可以考虑 $\frac{1}{2}(a+b)$ 并利用 $0<\frac{1}{2}<1$ 这个事实)

3) 如果 $\mathbb{R}$ 中存在元素 $o>0$，使得对任意的 $x>0$，我们都有 $o<x$，我们就称 o 是无穷小元。证明，$\mathbb{R}$ 中没有无穷小元。(有一种专门研究含有无穷小的数的分析，叫做非标准分析)

1) 这题干是什么东西…… 好问了一下老师现在明白了，挺简单的倒是。

注记. 我们之后将 $\mathbb{Q}$ 和 ι 的像等同。自此往后，我们就在这个意义下认为有理数 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集。换句话说，我们用 n 来表示 $\mathbb{R}$ 中的 $\overbrace{1+1+\cdots+1}^{k个}$，$\frac{p}{q}$ 表示 $\dfrac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{p个}}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{q个}}$ 等。习惯上，我们将 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 的元素称为是**无理数**（这是一个在中文世界里被广泛接受的“无理的”术语）。

（之前漏了这段话）

$\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$，$n \mapsto \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n}$ ∴ $n\cdot x = (\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{n})\cdot x = nx$

2) 令 $c_1 = \frac{a+b}{2}$，易知 $c_1 \in (a,b)$，取 $c_2 = \frac{3a+b}{4}$，易得 $c_2 \in (a, c_1)$，……

令 $c_n = \frac{(2^n-1)a+b}{2^n}$，$c_n \in (a, c_{n-1})$ ∴ $c_n \in (a,b)$ ∴ (a,b) 有无限个元素

3) 若存在无穷小 o，则根据(A)，对于 $x>0$，总有 $n\in \mathbb{N}$ s.t. $no \le x$，即 $o \le \frac{x}{n}$

∵ $x \in \mathbb{R}$ ∴ $\frac{x}{n} \in \mathbb{R}$，∴ $o < \frac{x}{n}$，矛盾。∴ 不存在无穷小元

(I) 区间套公理

给定有限（即要求下面的 a_n 和 b_n 均为实数）闭区间的序列 $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n=1,2,\cdots}$，如果这个序列是下降的，即 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$（等价于对任意的 $n \geqslant 1$ 都有 $a_n \leqslant a_{n+1}$ 并且 $b_{n+1} \geqslant b_n$），那么它们的交集非空，即

$$\lim_{n\to\infty} I_n := \bigcap_{n\geqslant 1} I_n \neq \emptyset.$$

定义 2. 我们将满足上述四条公理系统 **(F)**，**(O)**，**(A)**，**(I)** 的四元组 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ 称作是**实数**。

注记. 这个定义目前并不是**良好定义的**：我们完全不知道这样的实数理论是不是**唯一的**；我们甚至没有证明满足四条的四元组 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ 是存在的。另外，除了有理数之外，我们并没有证明无理数（比如说 $\sqrt{2}$）是存在的。

我们注意到，如果就强行要求 $\mathbb{R}$ 是全体有理数的集合并且配备了 $+$，$\cdot$ 和 $\leqslant$ 这几种有理数上的结构，我们所得到的四元组是满足 **(F)**，**(O)**，**(A)** 这三条公理系统的，所以，要想真的得到我们中学所熟悉的实数（比如说存在 $\sqrt{2}$），区间套公理是必不可缺的。