Informal Notes on Mathematics

2022.07.13

关于实数有一个重要（但是简单）的事实：存在充分大的正数，也存在充分小的正数，这将是数学分析中反复使用的事实。这个命题的精确说法如下（这是我们第一次用到 $\varepsilon-\delta$ 语言）：

引理 3. 对任意的正实数 A，总存 M，使得 $M>A$；对任意的正实数 a，总存在正实数 ε，使得 $\varepsilon<a$。

证明: 我们可以选取 $M=A+1$，$\varepsilon=\dfrac{a}{2}$。证明的要点在于说明 $\frac{1}{2}<1$。 □

问题保留

$\because 2>0 \quad \therefore 2^{-1}>0 \quad \therefore 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0 \quad \therefore 1>\frac{1}{2}$

在实数 $\mathbb{R}$ 上研究分析有一个重要的“几何观点”：尽管这个看法很“自然”，然而从公理化的观点而言，这绝非显而易见：

> 我们将 $\mathbb{R}$ 想象成一条“直线”：每个实数对应直线上的一个点；大小关系可以两点的一左一右来确定；区间就是两点之前的线段，诸如此类。
> 这种形象的看法使得在很多场合下的推理和计算变得容易操作和叙述。然而必须强调的是，在证明或者计算的过程中上述图像只起辅助的作用，一切结论都是严格根据从实数公理出发的所得到的结论通过正确推理而来。（这一如平面几何中画图对证明所起到的作用）
> 分析学会进一步深化这种几何化的看法：我们倾向于 **几何地**考虑问题。比如说，我们会将尽量多的数学对象想象成空间的点并发展相应的理论使得于几何的直观在应用的时候是严格的。

我们注意到，迄今为止，我们还未使用公理 **(I)**（区间套原理），上次课的最后也提到过，如果只用前三套公理体系，那么这种“实数”可能只包含有理数，这自然不是我们想要的实数理论。下面要证明的*确界原理*就依赖于区间套原理。

$X\subset\mathbb{R}$ 是实数的集合，$a,A\in\mathbb{R}$。如果对任意 $x\in X$，都有 $x\leqslant A$，就称 A 是 X 的一个**上界**；如果对任意 $x\in X$，都有 $x\geqslant a$，我们就称 a 是 X 的一个**下界**。如果 X 既有上界又有下界，我们就说 X 是**有界的**。X 有界等价于存在（大的）正实数 M，使得对任意 $x\in X$，我们都有 $|x|\leqslant M$。

定理 5 (确界原理)**.** 假设 $X\subset\mathbb{R}$ 是非空的并且 X 有上界。令 $\overline{\mathbb{M}}=\{\overline{M}\in\mathbb{R}\,|\,\overline{M}\text{是 }X\text{ 的上界}\}$，则 $\overline{\mathbb{M}}$ 有（唯一的）最小元，即存在 $\overline{M_0}\in\overline{\mathbb{M}}$，使得任意的 $\overline{M}\in\overline{\mathbb{M}}$，都有 $\overline{M_0}\leqslant\overline{M}$。

我们称 $\overline{M_0}$ 为 X 的**上确界**，记作 $\sup X$。

证明：这题的证明果真完美采用了几何的观点。我尝试自己理一下思路，

任选 $x\in X$，任取 $\overline{M}\in\overline{\mathbb{M}}$，令 $x\notin\overline{\mathbb{M}}$，对于每个正整数 $n\geqslant 1$，根据(A)，总有 $k\in\mathbb{N}$ s.t. $x+k2^{-n}\geqslant\overline{M}$（其实我认为这里选 2 或别的 >1 的数都没什么区别），因而 $x+k2^{-n}\in\overline{\mathbb{M}}$。令 k_n 为最小的满足条件的正整数，令 $I_n=[x+(k_n-1)2^{-n},\ x+k_n2^{-n}]=[a_n,b_n]$

(a) $I_n\cap X\neq\emptyset$

若不成立，则 k_n 将不是满足条件的最小正整数。

(b) $I_n\supset I_{n+1}$

即证明 $a_n\leqslant a_{n+1}$，$b_{n+1}\leqslant b_n \Leftrightarrow (k_n-1)2^{-n}\leqslant(k_{n+1}-1)2^{-(n+1)}$，$k_{n+1}2^{-(n+1)}\leqslant k_n2^{-n}$

这个部分相对麻烦一些，还是用反证法（见下页）

先比较右端点，如果 $k_{n+1}2^{-(n+1)} > k_n 2^{-n}$，那么 $k_{n+1}2^{-(n+1)}$ 比 $k_n 2^{-n}$ 至少大出来 $2^{-(n+1)}$ 这么多，所以 $(k_{n+1}-1)2^{-(n+1)} \geqslant k_n 2^{-n}$，这表明 I_{n+1} 的左端点 a_{n+1} 在 I_n 的右端点 b_n 的右边（可能重合），即 $a_n \geqslant b_{n+1}$，从而 a_n 也是 X 的上界，矛盾。

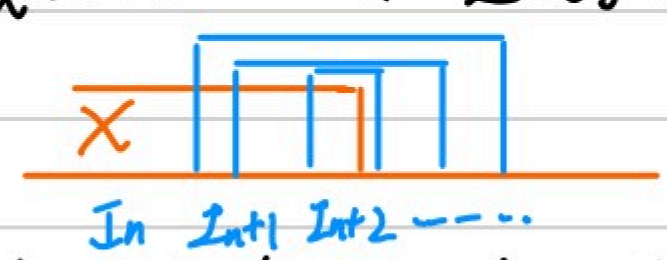
这里应该是莫名其妙的打印错误，应该是"a_{n+1}也是X上界"

其次比较左端点，如果 $(k_{n+1}-1)2^{-(n+1)} < (k_n-1)2^{-n}$，和上面一样的推理我们就知道 $k_{n+1}2^{-(n+1)} \leqslant (k_n-1)2^{-n}$，这表明 I_{n+1} 的右端点 b_{n+1} 在 I_n 的左端点 a_n 的左边（可能重合），所以 a_n 是 X 的上界，矛盾。

~~黄色部分看得我有点懵~~。我大概猜是这样：$k_{n+1}2^{-(n+1)} > k_n 2^{-n}$，$2^{-(n+1)} < 2^{-n}$
$\therefore k_{n+1} > 2k_n$ $\therefore k_{n+1} \geqslant 2k_n + 1$ $\therefore k_{n+1}2^{-(n+1)} - k_n 2^{-n} \geqslant k_n(2^{-n} - 2^{-n}) + 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)}$

啊，推出这个式子就显然了

我们证(b)就是为了用(I)区间套公理，感觉上就是从X向外向端点出"挤压"出"上确界"



由于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$，下一步我们要证明这个"上确界"的唯一性，设 $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$，$a, b \in J$，$a<b$，根据定义我们总有 $a, b \in I_n$。对于 $b-a$，根据(A)公理，总能找到足够大的 n，使得 $2^n(b-a) > 1$，即 $b-a > 2^{-n}$，此时 $b-a$ 大于 I_n 端点间距离，矛盾

这里果真非常妙啊

因此我们假设 $J = \{\overline{M_0}\}$。下面分成两步：(1)证明 $\overline{M_0}$ 是上界 (2)证明 $\overline{M_0}$ 是最小上界

- $\overline{M_0} \in \overline{\mathbb{M}}$，即 $\overline{M_0}$ 是 X 的一个上界。

  如若不然，存在 $y \in X$，使得 $y > \overline{M_0}$。根据定义，对每个 n，我们都有 $\overline{M_0} \in I_n$（因为 J 是所有 I_n 的交集），所以 $b_n - \overline{M_0} \leqslant 2^{-n}$。我们可以选取很大的 n，使得 $2^{-n} < y - \overline{M_0}$，从而 $y > \overline{M_0} + y \geqslant b_n$，这和 b_n 是 X 的上界矛盾（按照 I_n 的构造方式，它的右端点 b_n 是 X 的上届）。

- $\overline{M_0} = \min_{\overline{M} \in \overline{\mathbb{M}}} \overline{M}$ 是最小的上界。

  如若不然，那么存在 $\widetilde{M} \in \overline{\mathbb{M}}$ 使得 $\widetilde{M} < \overline{M_0}$。由于对每个 n，我们都有 $\overline{M_0} \in I_n$，所以 $a_n + 2^{-n} \geqslant \overline{M_0}$。我们可以选取很大的 n，使得 $2^{-n} < \overline{M_0} - \widetilde{M}$，从而 $a_n > \widetilde{M}$，这和 a_n 不是 X 的上界矛盾。

$\square$

注记. 关于确界，我们有下面几个补充，第三个尤为重要：

1) 对偶的命题：假设 $X \neq \emptyset$ 有下界，令 $\underline{\mathbb{M}} = \{\underline{M} \in \mathbb{R} | \underline{M} \text{是} X \text{的下界}\}$。那么，$\underline{\mathbb{M}}$ 有（唯一的）最大元，即存在 $\underline{M_0} \in \underline{\mathbb{M}}$，使得任意的 $\underline{M} \in \underline{\mathbb{M}}$，都有 $\underline{M_0} \geqslant \underline{M}$。我们称 $\underline{M_0}$ 为 X 的**下确界**，记作 $\inf X$。

2) $\inf X \leqslant \sup X$。

3) （上确界的刻画）假设非空集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有上界并且实数 M 是 X 的上界。那么，下面两个命题是等价的

- $M = \sup X$。
- 对任意的 $\varepsilon > 0$，都存在 $x \in X$，使得 $x > M - \varepsilon$。

集合的下确界也可以类似地刻画，我们略去叙述。这个刻画的证明我们留做作业题。

4) 假设 $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ 满足 **(F)**，**(O)** 和 *Archimedes* 公理 **(A)** 这三套公理。如果我们假设确界定理成立，那么区间套公理 **(I)** 可以被证明：

对任意的闭区间套序列 $\{I_n=[a_n,b_n]\}_{n=1,2,\cdots}$，其中对任意的 n，有 $a_n\leqslant a_{n+1}$，$b_{n+1}\geqslant b_n$。很明显，集合 $A=\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是有上界的（取 b_1 为上界），根据确界原理，我们令 $a=\sup A$，那么 $a\leqslant b_n$（因为每个 b_n 都是上界而上确界是最小的上界）；$B=\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 是有下界的（取 a 为下界），根据确界定理，我们令 $b=\inf B$，所以，$a\leqslant b$。那么，$\bigcap\limits_{n\geqslant 1} I_n\supset[a,b]\neq\emptyset$。

空间的概念

我们引入度量／距离空间的概念。我们已经讲过，所谓的空间，就是一个集合加上一些附加的结构：

定义 6. X 是集合。如果存在 $d: X\times X\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是 X 上双变量的函数，满足如下三条性质：

a) 对任意的 x 和 y，$d(x,y)\geqslant 0$ 并且取等号当且仅当 $x=y$；

b) 对任意的 x 和 y，$d(x,y)=d(y,x)$；

c) 三角不等式：对任意的 $x,y,z\in X$，我们有 $d(x,z)\cancel{\geqslant}\leqslant d(x,y)+d(y,z)$。

我们就称二元组 (X,d) 是一个**距离空间**或者**度量空间**。函数 d 被称作该距离空间上的**距离函数**。

任何一本合格的拓扑教材都会在这里举不少例子来表明度量空间中的距离不一定是我们日常认知中的“距离”，它甚至可能要“离散”得多。（Baubgaul，我完全忘了我去年用的是哪本拓扑教材，不是Munkres，因为这本开头没讲度量空间；也不是Lee的Topological Manifold，虽然我买了但我顶多看过前两节；现在姑且用Conway的那本吧。Мадхинщикува！）

Example 1.1.2. (a) Let $X=\mathbb{R}$, the set of real numbers, and define $d(x,y) = |x-y|$. See Exercise 1.

(b) Let $X=\mathbb{R}^2$, the plane, and define $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$. Readers know from the Pythagorean Theorem that this is the straight-line distance, and they can use geometry to verify that this standard notion of the distance between two points satisfies the axioms in the preceding definition. More generally, we can define a metric on q-dimensional Euclidian space $\mathbb{R}^q$ by

$$d(x,y)=\left[\sum_{n=1}^{q}(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

这里的证明要用到Cauchy-Schwarz不等式：（用向量可证）

$$\left[\sum_{n=1}^{q}x_ny_n\right]^2\leq\left[\sum_{n=1}^{q}x_n^2\right]\left[\sum_{n=1}^{q}y_n^2\right]$$

于品讲义上强调了此时我们尚未定义开平方运算，所以~~他举这个例子就是搞笑~~我们暂时假设这个运算和我们已知的相同

for $x=(x_1,\ldots,x_q)$ and $y=(y_1,\ldots,y_q)$ in $\mathbb{R}^q$. However, proving that this satisfies the needed axioms, specifically the triangle inequality, requires some effort, and the proof will be given later (Corollary 1.1.5).

(c) Let $X=\mathbb{R}^q$, q-dimensional Euclidean space, for x,y in $\mathbb{R}^q$ define

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{q}|x_n-y_n|.$$

曼哈顿距离

This is easier to verify as a metric (Exercise 2).

(d) Again let $X = \mathbb{R}^q$, and now define

$$d(x, y) = \max\{|x_n - y_n| : 1 \le n \le q\}.$$

切比雪夫距离

Once again, $(\mathbb{R}^q, d)$ is a metric space (Exercise 3). It is worth observing that in each of the last three examples, when $q = 1$, all these metrics are the standard absolute value on $\mathbb{R}$.

(e) Let X be any set, and define

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } x \ne y. \end{cases}$$

个人感觉比较迷惑的部分。这里面的开球应该是：$\begin{cases} \{p\}, & r \le 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$
(以p为中心的 open ball)
哪来的 $r>1$ 和 $r<1$？

It is a simple exercise to verify that (X, d) is a metric space. This is called the *discrete metric* on X.

问了老师没有理我，那目前把其看作固有定义算了。$B(x;1) = \{x\}$，$\bar{B}(x;1) = X$

MSE 上有类似的：Open balls are given by $B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & r \le 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$, but why is it not this way : $\begin{cases} \{x\}, & r < 1 \\ X, & r \ge 1 \end{cases}$. My reasoning is because the points lying on the boundary do not lie in $B_r(x)$, and should be considered NOT part of it.

好吧，这个问题倒是简单，他自己的 reasoning 就是对的。跟着定义走便是了。

4) 考虑复数域 $\mathbb{C}$。对于 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，定义 $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$，那么 $(\mathbb{C}, d)$ 是度量空间。

5)（子空间）假设 $Y \subset X$，我们定义 Y 上的距离函数:

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2).$$

那么，(Y, d_Y) 是度量空间。我们称 d_Y 是 d 在 Y 上的**诱导度量**，(Y, d_Y) 称作是 (X, d) 的**子（度量）空间**。

我们之后会经常用到稠密性的概念。给定度量空间 (X, d)，$Y \subset X$ 是子集。如果对任意的 $x \in X$ 和任意（小）的 $\varepsilon > 0$，都存在 $y \in Y$，使得 $d(y, x) < \varepsilon$，我们就称 Y 在 X 中是**稠密的**。直观上，Y 在 X 中稠密说的是对于 X 的每个点都有一个 Y 中的点和它离得要多近就有多近。