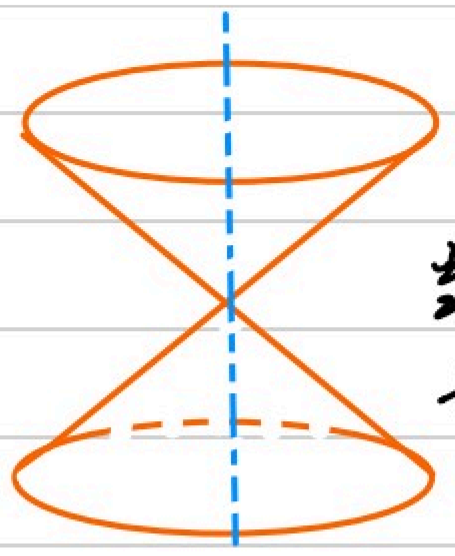


圆锥曲线(1)

用平面截 → 椭圆

当平面倾斜到和且仅和一条母线平行时 → 抛物线

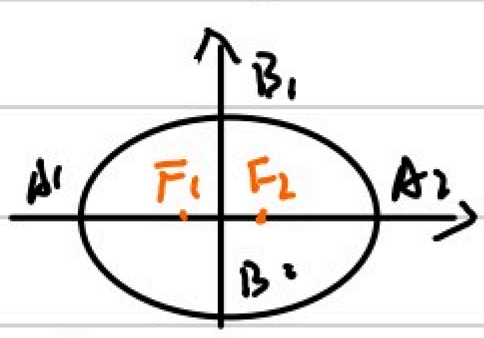
用平行于圆锥轴的平面 → 双曲线

定义：平面内与两个定点F_1、F_2距离和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫椭圆。

椭圆的标准方程

焦点在x轴上：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

焦点在y轴上：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$



长轴长 $|A_1A_2|=2a$

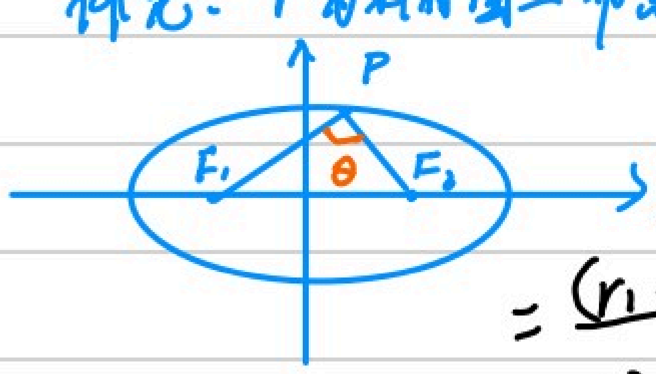
短轴长 $|B_1B_2|=2b$

顶点：$(\pm a,0)$，$(0,\pm b)$

离心率：椭圆的半焦距与半长轴之比称为离心率，用e表示：$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，$e\in(0,1)$

椭圆第二定义：平面上到定点F距离到定直线距离之比为常数e的点的集合(F不在定直线上)

补充：P为椭圆上动点，问P在何处时$\angle F_1PF_2$最大



解：设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$

$\therefore \cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-4c^2}{2r_1r_2}$

$=\frac{(r_1+r_2)^2-4c^2}{2r_1r_2}-1$

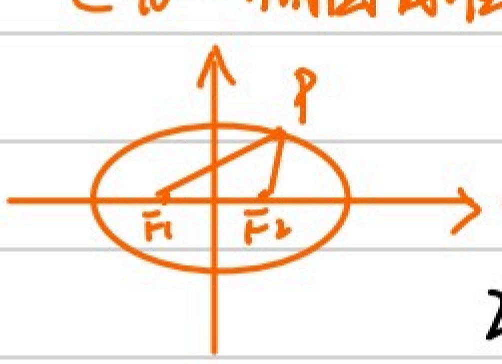
$=\frac{4a^2-4c^2}{2r_1r_2}-1$

$=\frac{2b^2}{r_1r_2}-1$ → r_1r_2最小 θ最大

$\because r_1r_2\le\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2=a^2$，仅当$r_1=r_2$时取等

$\therefore$ P在顶点处。

(另：椭圆标准方程推导：



$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$P(x,y)$

$\overset{A}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}+\overset{B}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=2a$ ①

$2a(A-B)=4cx$ ②

①-② ⇒ $a+\frac{cx}{a}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=x^2+2cx+c^2+y^2$

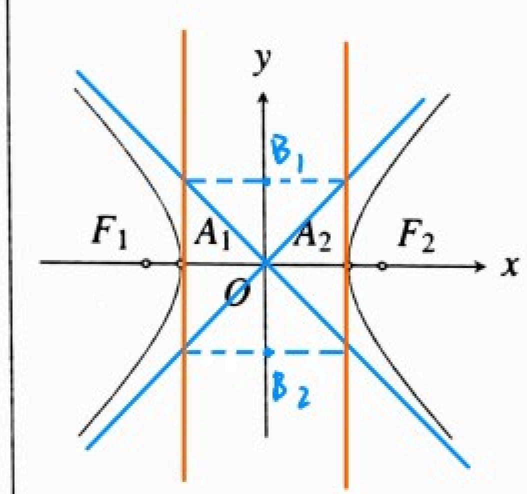
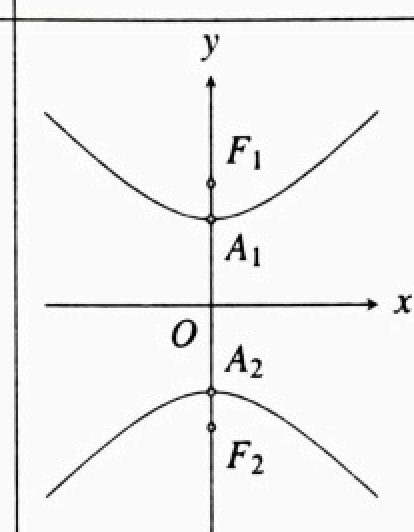
$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\underset{\to b^2}{a^2-c^2}}=1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

双曲线定义：平面内与两个定点F_1、F_2的距离之差的绝对值为常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫双曲线。

双曲线标准方程：

焦点在x轴上：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$

焦点在y轴上：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b)$

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$
图形		
范围	$x\ge a$ 或 $x\le -a$, $y\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$, $y\ge a$ 或 $y\le -a$
对称性	关于 x 轴，y 轴和原点对称	
顶点	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
轴长	实轴长 A_1A_2, $\lvert A_1A_2\rvert=2a$, 虚轴长 B_1B_2, $\lvert B_1B_2\rvert=2b$	

渐近线：焦点在x轴：$\pm\frac{b}{a}x$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$

焦点在y轴：$\pm\frac{a}{b}x$

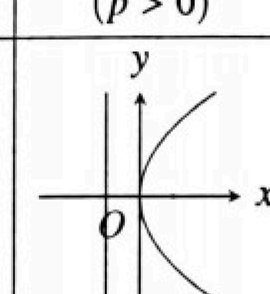
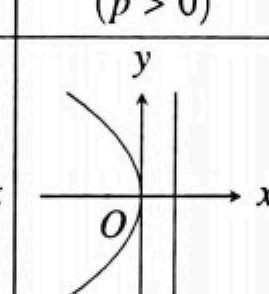
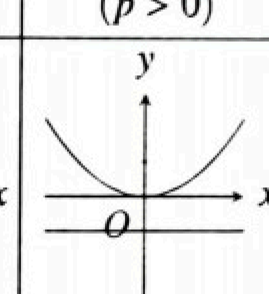
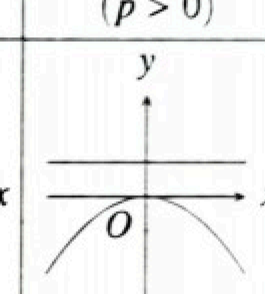
离心率：双曲线半焦距与半实轴之比称为双曲线的离心率，用e表示。$e=\frac{c}{a}$ $(e>1)$

抛物线定义：平面内到一定点和一定直线的距离相等的点的轨迹称为抛物线

抛物线标准方程 设焦点到准线的距离为p

焦点在x轴上：$y^2=\pm 2px$

焦点在y轴上：$x^2=\pm 2py$

方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图像				
焦点	$(\frac{p}{2},0)$	$(-\frac{p}{2},0)$	$(0,\frac{p}{2})$	$(0,-\frac{p}{2})$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
x,y 范围	$x\in[0,+\infty)$, $y\in\mathbb{R}$	$x\in(-\infty,0]$, $y\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$, $y\in[0,+\infty)$	$x\in\mathbb{R}$, $y\in(-\infty,0]$
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	原点			
离心率	1			

椭圆与双曲线第三定义

平面内两定点 $A(a,0)$, $B(-a,0)$

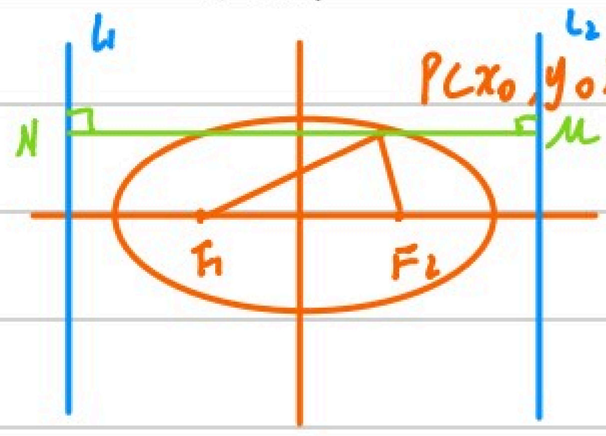
若动点 P 满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1$.

则动点 P 与两定点连线间形成轨迹

称作椭圆或双曲线.

其中 e 为离心率.

$\longrightarrow$ 盲猜和 k_{PA}、k_{PB} 的正负有关



顺带一提，PF_1 和 PF_2 的长

根据第二定义，$\frac{PF_1}{PN}=\frac{PF_2}{PM}=e$

L_1、L_2 为椭圆准线，

其方程为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$

$\therefore |PF_1|=e|PN|=\frac{c}{a}(x_0+\frac{a^2}{c})=a+ex_0$

$|PF_2|=e|PM|=\frac{c}{a}(-x_0+\frac{a^2}{c})=a-ex_0$

好，承接了 B 笔记的稠密性部分

练习. 证明，有理数和无理数在实数（这是一个度量空间）中都是稠密的。

第一想法是区间套公理或 Dedekind 分割，感觉思路上和那个确界定理会是一样的，但是很难构造性地这样去证明。

（再放一遍定义）

我们之后会经常用到稠密性的概念。给定度量空间 (X,d)，$Y\subset X$ 是子集。如果对任意的 $x\in X$ 和任意（小）的 $\varepsilon>0$，都存在 $y\in Y$，使得 $d(y,x)<\varepsilon$，我们就称 Y 在 X 中是**稠密的**。

证明：固定某正整数 q，取 p 为所有整数，则 $\frac{p}{q}$ 将实数轴均分成每份长 $\frac{1}{q}$ 的区间，给定 $x\in\mathbb{R}$，则必存在某一整数 p s.t. $\frac{p}{q}\le x<\frac{p+1}{q}$（取等能且这么处理），则 $0\le x-\frac{p}{q}<\frac{1}{q}$ $\therefore d(x,\frac{p}{q})<\frac{1}{q}$，此时取 $q=[\frac{1}{\varepsilon}]$（向上取整），易知定义符合，因此有理数稠密；选取某个已知的无理数 π_0，则对 $x\in\mathbb{R}$，$\frac{p}{q}\le x+\pi_0<\frac{p+1}{q}$（$p$、$q$ 同上，根据有理数稠密性）$\therefore 0\le x+\pi_0-\frac{p}{q}<\frac{1}{q}$ $\therefore d(x,\frac{p}{q}-\pi_0)<\frac{1}{q}$ 由于 $\frac{p}{q}-\pi_0$ 为无理数，$\therefore$ 同上可得无理数的稠密性。 $\square$

定义 7. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 是实数域（可以是别的域，比如说有理数或者复数），V 是集合。我们假设存在两种运算：

- 加法运算。$+: V\times V\to V$, $(v,w)\mapsto v+w$;
- 数乘运算。$\cdot: \mathbb{F}\times V\to V$, $(\lambda,v)\mapsto\lambda\cdot v$。

我们假设三元组 $(V,+,\cdot)$ 满足如下的八条公理（其中 $\lambda\,\mu\in\mathbb{F}$，$u,v,w\in V$ 是任意选取的）:

1) 加法结合律：$u+(v+w)=(u+v)+w$;

2) 加法交换律：$u+v=v+u$;

3) 存在加法单位元：存在 $0\in V$（被称作是 V 的**原点**），使得对任意 $v\in V$，$0+v=v$ 成立；

4) 加法逆元的存在性：对任意 $v\in V$，存在 $-v\in\mathbb{R}$，使得 $v+(-v)=0$;

5) 数乘的结合律：$\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\cdot_{\mathbb{F}}\mu)\cdot v$;

6) 数乘的分配律之一：$(\lambda+_{\mathbb{F}}\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$;

7) 数乘的分配律之二：$\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$;

8) 乘法单位元：$1\cdot v=v$。

我们就称三元组 $(V,+,\cdot)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个**线性空间**或者**向量空间**，或者称作 $\mathbb{F}$-线性空间。

练习. 试在 $\mathbb{R}^n$ 定义 $+$ 和 $\cdot$ 的结构使得它成为一个 $\mathbb{R}$-线性空间。

解：$a, b \in \mathbb{R}^n$，$a=(a_1, a_2, \cdots a_n)$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$a+b := (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$，$0 := (0, 0, \cdots, 0)$

$\lambda \cdot a := (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$，$1 := 1 \in \mathbb{R}$

易验证其满足条件

Dedekind 分割与实数的构造

定义 8 (Dedekind 分割). $X \subset \mathbb{Q}$ 是有理数的子集，令 $X' = \mathbb{Q} - X$。如果下面三条性质都成立：

1) $X \neq \emptyset$，$X' \neq \emptyset$；

2) 对任意 $x \in X$，$x' \in X'$，都有 $x < x'$；

3) X 中没有最大元，

我们就称 X 或 $X \cup X'$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个 **Dedekind 分割**。我们用 $\mathcal{R}$ 表示所有 *Dedekind* 分割组成的集合。

注记. 我们可以重新解读后两条性质：

- 第二条 *2)* 等价于说，如果 $x_1 \in X$，那么对任意的 $x_2 < x_1$，我们就有 $x_2 \in X$。这也表明，如果 $x_1' \in X$，那么对任意的 $x_2' > x_1'$，我们就有 $x_2' \in X'$。
- 第二条 *3)* 指的是对任意 $x \in X'$，总存在 $x' \in X$，使得 $x' > x$。

这其实可以看作两个情况：① X' 有最小元，② X' 无最小元。两个分割对应有理数和无理数（显然）

例子. 我们给出两个 *Dedekind* 分割的例子（课堂练习：直接验证定义）：

a) 假设 $\dfrac{p}{q}$ 是有理数，其中 $p \in \mathbb{Z}$，$q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 并且 p 和 q 互素，我们定义

$$X_{\frac{p}{q}} = \{x \in \mathbb{Q} | x < \frac{p}{q}\}.$$

这个例子将给出所有的有理数。

b) 我们定义 $X_{\sqrt{2}}$ 如下：

$$X_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0} | x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_{\leqslant 0}.$$

这个例子将给出我们所熟悉的 $\sqrt{2}$。

序结构

现在，我们要在 $\mathcal{R}$ 上定义序关系，加法和乘法，使得 $(\mathcal{R}, +, \cdot, \leqslant)$ 满足四套公理。
我们先定义序关系：

定义 (序关系). 对任意的 $X, Y \in \mathcal{R}$，作为 $\mathbb{Q}$ 的子集合，如果

- $X = Y$，我们称 $X = Y$；

- $X \subset Y$ 且 $X \neq Y$，我们称 $X < Y$（也记做 $Y > X$）。

我们首先来验证这个序关系满足公理 (O1)，(O2) 和 (O3)：

(O3). $\leqslant$ 是一个全序关系，即对任意的 $X, Y \in \mathcal{R}$，$X \subset Y$ 和 $Y \subset X$ 必居其一：

我们假设 $X \not\subset Y$，只要说明 $Y \subset X$ 即可。根据假设，存在 $x \in X$，使得 $x \notin Y$，根据序的定义中的 2)，对任意的 $y \in Y$，都有 $y \leqslant x$（否则 $x < y$，$y \in Y$，就可以推出 $x \in Y$，矛盾!），从而 $y \in X$（因为 $x \in X$），所以 $Y \subset X$。

(O1). 对任意的 $X, Y, Z \in \mathcal{R}$，如果 $X < Y$，$Y < Z$，那么 $X < Z$。

这就是集合关系的传递性的重新叙述。

(O2). 对任意的 $X, Y \in \mathcal{R}$，$X < Y$，$X = Y$ 或者 $X > Y$ 三者恰有一种情形成立。

用集合的包含关系来看，这是显然的。

好，以目前的定义我们可以再证一遍确界定理了，但时间不足。 $\boxed{\text{问题保留}}$

加法结构

我们现在定义加法运算：

定义 (加法). 对任意的 $X, Y \in \mathcal{R}$，我们定义

$$X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}.$$

我们还定义零元素 $\overline{0}$ 为

$$\overline{0} = X_0 = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}.$$

注记. 我们首先说明加法运算

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R},\ (X, Y) \mapsto X + Y$$

是良好定义的，即说明上面所定义的 $X + Y$ 的确是 *Dedekind* 分割（先验地来看，$X + Y$ 只是 $\mathbb{Q}$ 的一个子集）。为此，我们只需要依次验证 *Dedekind* 分割的定义中的三条性质：

Saucag，又是良定义。出于偷懒不能偷太多的原则 这里我决定自己证一遍。

(i) $(X+Y) \neq \varnothing$，$(X+Y)' \neq \varnothing$

$\because X、Y$ 非空，$\therefore X+Y$ 非空　又对于任何 $x_0 \in X$，$y_0 \in Y$，都有 $x_0' \in X'$，$y_0' \in Y'$ 使得 $x_0 < x_0'$，$y_0 < y_0'$　$\therefore x_0 + y_0 < x_0' + y_0'$　$\because x_0' + y_0' \notin X+Y$　$\therefore x_0' + y_0' \in (X+Y)'$

$\therefore (X+Y)'$ 非空

(ii) 对于任何 $x+y \in X+Y$，若 $z < x+y$，则 $z \in X+Y$

$\because z < x+y$　$\therefore z - x < y$　$\because Y$ 是一个 Dedekind 分割　$\therefore z - x \in Y$　$\therefore z = x + (z-x)$　$\because x \in X$，$z - x \in Y$　$\therefore x + (z-x) \in X+Y$，即 $z \in X+Y$

(iii) $X+Y$ 中无最大元

若其中有最大元，设其为 $x_0 + y_0$，其中 $x_0 \in X$，$y_0 \in Y$、由于 X、Y 都是 Dedekind 分割，X、Y 中均无最大元，即存在 $x_1 \in X$，$y_1 \in Y$ s.t. $x_1 > x_0$，$y_1 > y_0$　$\therefore x_1 + y_1 \in X+Y$ 且 $x_1 + y_1 > x_0 + y_0$，矛盾

综上所述，X+Y是个 Dedekind 分割。 □

(F1) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$。

根据定义，这是显然的。

(F2) $X+Y=Y+X$。

根据定义，这也是显然的。

(O4) 如果 $X<Y$，那么 $X+Z<Y+Z$。

这个性质的证明不是一句话就可以完成的，我们先准备一个技术工具

引理 9. X 是 Dedekind 分割。那么，对任意的正整数 n，总存在 $x\in X$，$x'\in X'$，使得

$$0<x'-x<\frac{1}{n}.$$

证明想法可以追溯到庄周：一尺之棰，日取其半，万世不竭。—《庄子 · 天下》

LOLmyoku，我之前证明有理数稠密性就用了差不多的这玩意，这么看来那时候就那么做并不严谨？然而实际上我看不出哪里有问题。Magnuuywuyua！数分总是这样。（好吧，应该就是没问题。）

证明: 任意选定 $x_0\in X, x'_0\in X'$，我们通过归纳的方式来构造一些列的 (x_k,x'_k)，其中 $k\geqslant 0$，$x_k\in X$，$x'_k\in X'$。假设 (x_k,x'_k) 已经构造好了，那么我们考虑 $y=\frac{1}{2}(x_k+x'_k)$。有两种可能的情况：如果 $y\in X$，那么定义 $(x_{k+1},x'_{k+1})=(y,x'_k)$；如果 $y\in X'$，那么定义 $(x_{k+1},x'_{k+1})=(x_k,y)$。很明显，我们有

$$|x_{k+1}-x'_{k+1}|=\frac{1}{2}|x_k-x'_k| \quad\Rightarrow\quad |x_k-x'_k|=\frac{1}{2^k}|x_0-x'_0|.$$

上面的等式对任意的 k 都对。特别地，我们选取 k_0，使得 $2^{k_0}>n|x_0-x'_0|$，从而 $x=x_{k_0}\in X$ 和 $x'=x'_{k_0}\in X'$ 满足要求。 □

回到 (O4) 的证明：首先注意到不等式 $X+Z\leqslant Y+Z$ 是显然的，所以只要说明 $X+Z\neq Y+Z$ 即可。我们选取 $y,\tilde{y}\in Y-X$，使得 $y>\tilde{y}$（先取 $\tilde{y}$，由于 Y 没有最大元，可以再选 y）。现在选取自然数 n，使得 $\frac{1}{n}<y-\tilde{y}$（在有理数中这一点总能做到）。根据引理，我们再取 $z\in Z$，$z'\in Z'$，使得 $z'-z<\frac{1}{n}$。

之前我说是(A)公理推论，现在看来没有必要强调

我们现在说明 $y+z\notin X+Z$：如若不然，那么存在 $x\in X$，$z_1\in Z$，使得 $y+z=x+z_1$。按照定义，$x<\tilde{y}$，所以 $z_1<z'$。这样，我们得到如下两个不等式：

$$\begin{aligned}x&<(\tilde{y}-y)+y,\\ z_1&<(z'-z)+z<\frac{1}{n}+z<(y-\tilde{y})+z.\end{aligned}$$

将这两个不等式相加，我们得到 $x+z_1<y+z$，矛盾。

(F3) 对任意的 $X\in\mathcal{R}$，我们都有 $\overline{0}+X=X$。

这乍看很显然，因为 $\{x \mid x<0\}$ 很显然给出了我们印象中的 0，但这个加法目前还不是我们认识的加法，所以这个证明还有点意思。然而再看我就疯了，证明见于品讲义 p33。

(F4) 对任意的 Dedekind 分割 X 和 Y，存在唯一的 $Z \in \mathcal{R}$，使得 $X+Z=Y$。$Y=\bar{0}$ 的情况就是公理 (F5)。

同上，证明见子品P4、

我们再进一步研究刚才所以定义的加法的结构。注意到，根据刚刚证明的 (F4)，我们可以定义相反数的运算：

$$-:\mathcal{R}\to\mathcal{R}, X\mapsto -X.$$

其中 $-X$ 是使得 $X+Z=\bar{0}$ 的（唯一的）那一个 Z。按照定义，我们有 $-X=\{y-x'|y\in\bar{0}, x\in X'\}$。根据公理 (F1)-(F4)（目前已经证明），这个 Z 是唯一的并且 $-(-X)=X$。我们还可以说明，这里定义的负号运算和本来有理数上的负号的运算是一致的，即若 $\frac{p}{q}$ 是有理数，那么 $X_{-\frac{p}{q}}=-X_{\frac{p}{q}}$：为此，我们只需要说明 $X_{-\frac{p}{q}}+X_{\frac{p}{q}}=\bar{0}$ 即可，我们把验证细节的乐趣以及下面的练习题一并留给同学们：

这个乐趣还是下次再体验吧。而且紧接就是四套习题，这才第一课时啊于教授，该说您不愧是在法国继承Bourbaki精神内涵的мужчина吗。