Informal Notes on Mathematics
2022.07.16

总的来说今天的情况有点复杂。白天忙活别的事情，晚上又先补了一些的笔记，被[illegible]的讲义搞得死去活来，当开始写今天的笔记已经快到10点了。能写多少看造化吧。

（想开没开成的坑：①立体几何（漏听的课） ②Napkin逐页推进（当休闲了） ③复分析 ④Artin的抽代 ⑤线性代数（学过就忘，麻了） ⑥鸽了两星期的积分训练 ⑦非标准分析 ⑧点拓（去年学今年忘））

画红线的在明后天必须开坑，我说的！

先补完今天漏的课再说吧

圆锥曲线（二）

15.1 直线与椭圆的位置关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
交点个数	2	1	0

定义 286 (直线与椭圆的位置关系). 直线与椭圆一共有三种位置关系: 相交, 相切, 相离.

联立消元，判断一元二次方程根的个数

例 287. 判断直线 $y=2x-2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 是否有公共点? 若有公共点, 求出公共点的坐标; 若无公共点, 请说明理由.

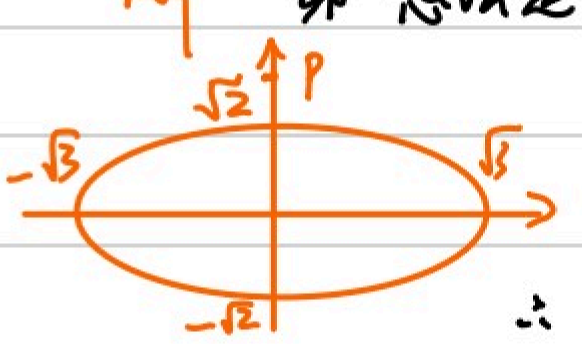
解：相交。∵ $y=2x-2$ ∴ $\frac{x^2}{5}+\frac{4(x-1)^2}{4}=1$ ∴ $\frac{6}{5}x^2-2x=0$

∴ $x_1=0$, $x_2=\frac{5}{3}$ ∴ 交点为 $(0,-2)$, $(\frac{5}{3},\frac{4}{3})$

求

例 288. 过点 $P(0,2)$ 且与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 相切的直线方程.

解：第一想法是隐函数求导，但今天有点累还是常规算吧。



易知P在C外。（推论：(m,n)在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外 $\Leftrightarrow \frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}>1$）

设 $y=kx+2$ ∴ $\frac{x^2}{3}+\frac{(kx+2)^2}{2}=1$ ∴ $2x^2+3k^2x^2+12kx+12=6$

∴ $\Delta=(12k)^2-4(2+3k^2)\times 6=0$ ∴ $72k^2=48$, $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ ∴ $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x+2$

定义 289 (直线与圆锥曲线相切). 直线方程与圆锥曲线方程联立消元后得到的是一个一元二次方程, 且该方程有两个相等的实数根, 则称该直线与圆锥曲线相切.

有猜这里想表达只有一个交点并非相切。

$\Delta=0$　　或一次方程一解，但相交

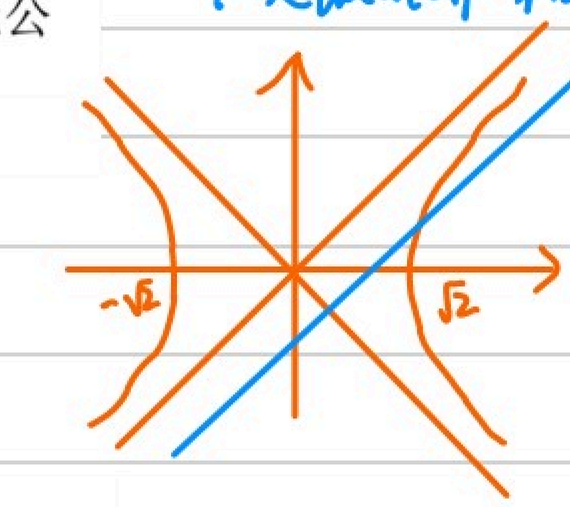
例 290. 判断直线 $y=x-1$ 与 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 是否有公共点, 若有公共点, 求出公共点的坐标; 若无公共点, 请说明理由.

斜率为1　　渐近线为 $y=\pm x$

解：啊果真如我所料，一个交点但不相切。

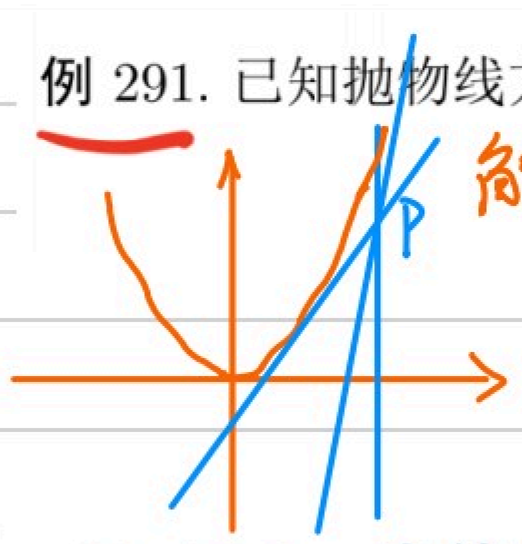
$x^2-y^2=2$ ∴ $x^2-(x-1)^2=2$

∴ $2x=3$, $x=\frac{3}{2}$ ∴ 公共点 $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$



例 291. 已知抛物线方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$, 求经过点 $P(2,6)$ 且与抛物线只有一个焦点的直线方程.

交



解：如图，两种情况。

① k不存在 $\Rightarrow x=2$

② k存在 ∴设 $y=kx+b=kx+6-2k$ ∴ $2x^2=kx+6-2k$, $\Delta=k^2+4\times2(6-2k)$

$=k^2-16k+48$ ∴ $k_1=12$, $k_2=4$ ∴ $y=12x-18$ 或 $y=4x-2$

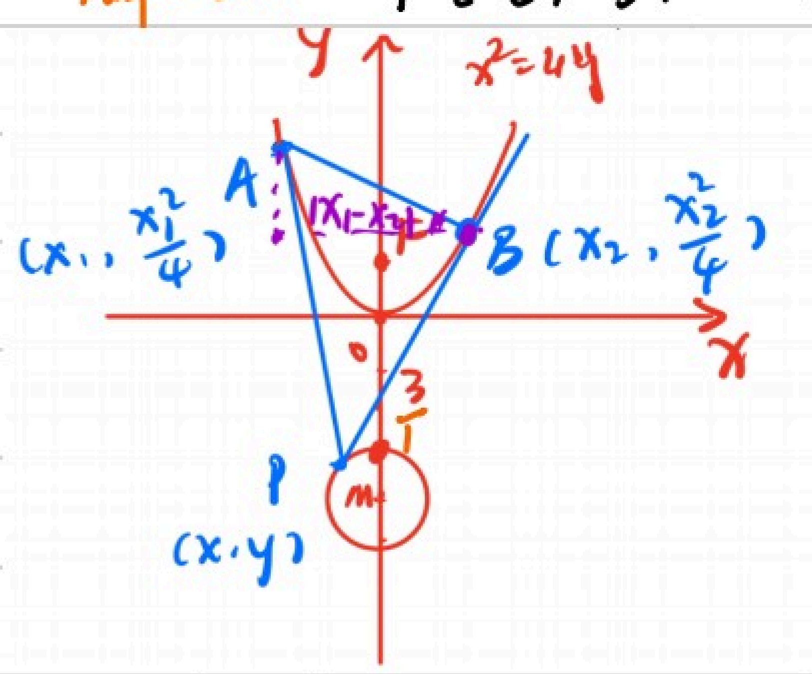
15.3 直线与圆锥曲线综合

例 292. 已知抛物线 $C:x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点为 F, 且 F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

1. 求 p;

2. 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

解: (1) $T(0,-3)$ $\therefore F(0,1)$ $\therefore p=2$ (p为焦准距, 即焦点到准线距离)



(2) 设 $A(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, $B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$, $P(x,y)$

(可以用 shoelace 定理 (奇怪的名字), $S=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1}-x_{i+1}y_i)\right|$)

设 $AB: y=kx+b$

$\because x^2=4y=4(kx+b)$ $\therefore x_1+x_2=4k$, $x_1x_2=-4b$

$\because x^2=4y$ $\therefore y'=\frac{x}{2}$ $\therefore k_{AP}=\frac{x_1}{2}$, $k_{BP}=\frac{x_2}{2}$

$\therefore y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$, $y-\frac{x_2^2}{4}=\frac{x_2}{2}(x-x_2)$

$\therefore \frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}=\frac{x_2-x_1}{2}x+\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}$, $(x_1-x_2)x=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{2}$, $x=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$, $y=-b$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y-xy_2+xy_1-x_1y)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\frac{x_1x_2}{4}(x_2-x_1)+(x_2-x_1)y-x(y_2-y_1)\right)\right|=\left|\frac{1}{2}(-4b\sqrt{k^2+b}-4b\sqrt{k^2+b}-8k^2\sqrt{k^2+b})\right|=(4b+4k^2)\sqrt{k^2+b}$

$x_2-x_1=\sqrt{16k^2+16b}=4\sqrt{k^2+b}$, $y_2-y_1=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{4}=4k\sqrt{k^2+b}$

设 $k^2+b=t$ $\therefore S_{\triangle ABC}=4t\cdot t^{\frac{1}{2}}=4t^{\frac{3}{2}}$

$\because t=k^2+b=\frac{x^2}{4}-y=\frac{1-(y+4)^2}{4}-y$ $\therefore y=-5$时, t最大

$\therefore t=5$ $\therefore S_{\triangle ABC}=4\times 5^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}$

下顶点 $b=2$

例 293 (2021. 北京卷.21). 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 过点 $A(0,-2)$, 以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$. $S=\frac{1}{2}(2a)(2b)=2ab=4\sqrt{5} \Rightarrow a=\sqrt{5}$

(1) 求椭圆 E 的标准方程; $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

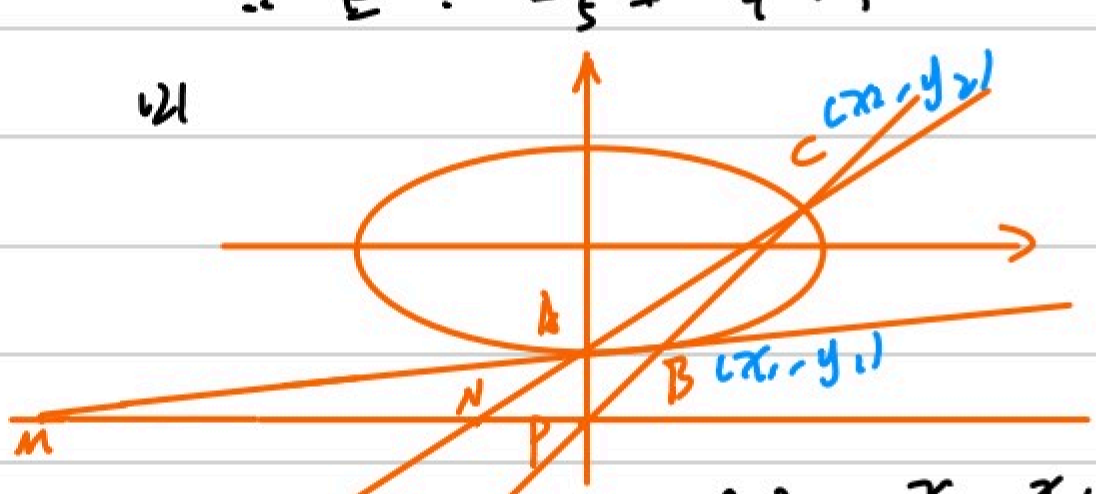
(2) 过点 $P(0,-3)$ 的直线 l 斜率为 k, 交椭圆 E 于不同的两点 B, C, 直线 AB 交 $y=-3$ 于点 M, 直线 AC 交 $y=-3$ 于点 N, 若 $|PM|+|PN|\le 15$, 求 k 的取值范围.

不为0

解: (1) $\because$ 过 $A(0,-2)$ $\therefore b=2$ $\because S=4\sqrt{5}$ $\therefore a=\sqrt{5}$

$\therefore E: \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

(2)



$y=kx-3$, $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

$\therefore 4x^2+5(kx-3)^2=20$, $(5k^2+4)x^2-30kx+25=0$

$\therefore \Delta=900k^2-100(5k^2+4)=400k^2-400>0$

$\therefore k>1$ 或 $k<-1$

$AB: \frac{x-x_1}{-x_1}=\frac{y-y_1}{-2-y_1}$ $AC: \frac{x-x_2}{-x_2}=\frac{y-y_2}{-2-y_2}$ $\therefore$ 将 $y=-3$ 代入

$\therefore \frac{x-x_1}{-x_1}=\frac{3+y_1}{2+y_1}$, $(2+y_1)x-(2+y_1)x_1=-(3+y_1)x_1$, $x=-\frac{x_1}{y_1+2}$ $\therefore x_M=\frac{-x_1}{y_1+2}$

同理 $x_N=-\frac{x_2}{y_2+2}$ $\therefore |PM|+|PN|=|x_M+x_N|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|=\left|\frac{x_1y_2+2(x_1+x_2)+x_2y_1}{(y_1+2)(y_2+2)}\right|$

$\because y_1=kx_1-3$, $y_2=kx_2-3$ $\therefore |PM|+|PN|$

$=\left|\frac{x_1(kx_2-3)+x_2(kx_1-3)+2(x_1+x_2)}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}\right|=\left|\frac{2kx_1x_2-(x_1+x_2)}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}\right|$

$x_1+x_2=\frac{30k}{5k^2+4}$, $x_1x_2=\frac{25}{5k^2+4}$

$y_1+y_2=\frac{30k^2}{5k^2+4}-6=-\frac{24}{5k^2+4}$

$y_1y_2=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=\frac{36-20k^2}{5k^2+4}$

$=\left|\frac{50k-30k}{36-20k^2-48+4(5k^2+4)}\right|=15|k|\le 15$ 又 $\because k>1$ 或 $k<-1$

$\therefore k\in[-1,-1)\cup(1,3]$