INFORMAL NOTES ON MATHEMATICS

2022.07.18

数列的通项与求和　1. 不动点法

不动点：若对于函数 $f(x)$，有 $f(x_0)=x_0$，则 x_0 为 f 的不动点。若此时 $\{a_n\}$ 的递推由 $a_{n+1}=f(a_n)$ 给出，则称 x_0 为 $\{a_n\}$ 的不动点（即 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的交点）

一阶线性递推数列　形如 $a_{n+1}=pa_n+q$

分式递推数列　形如 $a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+t}$

例：$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$

解：$\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}=1+\underbrace{\frac{1}{a_n}}_{b_n}$，$b_{n+1}=b_n+1$

$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_n}$

例：$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_n}$

这题不能拿上个例子的变换来做

解：如果用上，则有 $\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}}=1-\underbrace{\frac{a_n}{a_n+1}}_{\text{并不是}b_n}$

因此我们考虑让左右分母一致，设加上 ε

$a_{n+1}+\varepsilon=\frac{(1+\varepsilon)a_n+1}{a_n}$　$\therefore (1+\varepsilon)a_n+1=(1+\varepsilon)(a_n+\varepsilon)$

$\therefore \varepsilon^2+\varepsilon=1$　解出 ε 后可代入用上方法求。

好，现在我们来看一般的形式

$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+t}$

1° 希望分子一致

$a_{n+1}-x=\frac{pa_n+q}{ra_n+t}-x=\frac{(p-xr)a_n+q-xt}{ra_n+t}$

$\therefore$ 令 $(p-xr)a_n+q-xt=(p-xr)(a_n-x)$

$-(p-xr)x=q-xt$

$x^2r+xt=xp+q$

$x=\frac{xp+q}{xr+t}$ ⇒ 可解得 x，设 $x=m$

$\therefore a_{n+1}-m=\frac{k(a_n-m)}{ra_n+t}$（$k=p-mr$ 为常数）

2° 取倒数

$\frac{1}{a_{n+1}-m}=\frac{ra_n+t}{a_n-m}\cdot\frac{1}{k}$ ⇒ 可化成 $\frac{\alpha}{a_n-m}+\beta$

3° 数列代换

$b_n=\frac{1}{a_n-m}$，$b_{n+1}=\alpha b_n+\beta$

一阶线性数列

4° 按7.17笔记中的累加/累乘求解

以上记为方法一

下面是正统的不动点法

从 $x=\frac{xp+q}{xr+t}$ 开始，若其有两个解 x_1 x_2 且 $x_1\neq x_2$

$$\begin{cases} a_{n+1}-x_1=\frac{(p-x_1r)(a_n-x_1)}{ra_n+t} \\ a_{n+1}-x_2=\frac{(p-x_2r)(a_n-x_2)}{ra_n+t} \end{cases}$$

$\therefore \underbrace{\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}}_{b_{n+1}}=\underbrace{\frac{p-x_1r}{p-x_2r}}_{\text{常数}}\underbrace{\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}}_{b_n}$

$\therefore \{b_n\}$ 为等比数列，公比为 $\left(\frac{p-x_1r}{p-x_2r}\right)$ ☆

以上为方法二

方法总结：求不动点 → $\begin{cases} x_1=x_2 \to \text{方法一} \\ x_1\neq x_2 \to \text{方法一/方法二} \end{cases}$

例2：$\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=\frac{5a_n-1}{a_n+3}$，求通项

解：$x=\frac{5x-1}{x+3}$，$x^2-2x+1=0$，$x_1=x_2=1$

因此只能用方法一

$a_{n+1}-1=\frac{5a_n-1}{a_n+3}-1=\frac{4a_n-4}{a_n+3}$

$\therefore \underbrace{\frac{1}{a_{n+1}-1}}=\frac{a_n+3}{4a_n-4}=\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{a_n-1}}$

$\therefore b_{n+1}=\frac{1}{4}+b_n$

$\therefore b_n=2+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{n+7}{4}$

$\therefore a_n=\frac{4}{n+7}+1=\frac{n+11}{n+7}$

2. 特征方程法

二阶线性递推数列　形如 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

例：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

解：$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=\cdots=a_2-a_1$

$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$　分界线

$a_{n+2}-\lambda a_{n+1}=(p-\lambda)a_{n+1}+qa_n$

$=(p-\lambda)\underbrace{(a_{n+1}+\frac{q}{p-\lambda}a_n)}_{a_{n+1}-\lambda a_n}$

希望 λ 满足 $\frac{q}{p-\lambda}=-\lambda$

$\therefore \lambda^2-p\lambda-q=0$ ⇒ 特征方程

其根为特征根　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

相当于　$x^2=px+q\cdot 1$

λ 为特征根，$\underbrace{a_{n+2}-\lambda a_{n+1}}_{b_{n+1}}=(p-\lambda)\underbrace{(a_{n+1}-\lambda a_n)}_{b_n}$

$\{b_n\}$ 为等比数列

$a_{n+1}-\lambda a_n=b_n$ → 一阶线性，求 a_n

整理后我们有：$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

称 $x^2-px-q=0$ 为特征方程，两根为 x_1、x_2

i $x_1\neq x_2$

$a_n=Ax_1^n+Bx_2^n$（A、B 为常数）

求 A、B：将 a_1、a_2 代入

$$\begin{cases} a_1 = Ax_1 + Bx_1 \\ a_2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

ii) $x_1 = x_2 = x$

$$a_n = x^n(A+nB)$$

$$\begin{cases} a_1 = x(A+B) \\ a_2 = x^2(A+2B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

(F4) 对任意的 Dedekind 分割 X 和 Y，存在唯一的 $Z \in \mathcal{R}$，使得 $X+Z=Y$。$Y=\bar{0}$ 的情况就是公理 (F5)。

$X, Y \in \mathcal{R}$ 给定，我们按照下面的方式定义 Z：

$$Z = \{y - x' \,|\, y \in Y, x' \in X'\}.$$

我们首先要说明 $Z \in \mathcal{R}$，其推理与之前验证 $X+Y \in \mathcal{R}$ 的方式类似：

– $Z \neq \emptyset$，$Z' \neq \emptyset$。

Z 显然不是空集；为了说明 Z' 不是空集，我们选定 $y_0' \in Y$，$x_0 \in X$，只要说明 $y_0' - x_0 \notin Z$ 即可：如若不然，存在 $y \in Y$ 和 $x' \in X'$，使得 $y - x' = y_0' - x_0$，即 $y + x_0 = y_0' + x'$，这与 $y < y_0'$ 以及 $x_0 < x'$ 矛盾。

– 对任意的 $y - x' \in Z$，其中 $y \in Y, x' \in X'$，如果 $z < y - x'$，就一定有 $z \in Z$。

我们只需要把 z 分解为 $z = y - (y - z)$，根据 $z < y - x'$，我们知道 $y - z > x'$，所以 $y - z \in X'$，所以 z 可以写成 Y 中元素与 X' 中元素的差。

– Z 中的元素没有最大元。

证明是平凡的。

现在来说明 $X+Z=Y$

$X+Y$中元素形如 $x+(y-x')$，$x \in X$，$y \in Y$，$x' \in X'$ ∵ $x < x'$ ∴ $x+y-x' < y$

∴ $x+(y-x') \in Y$ ∴ $X+Z \subset Y$；对于任何 $y \in Y$，取 $\bar{y} \in Y$，使 $\bar{y} > y$，由很久以前的上次数分笔记，我们总有 $x \in X$，$x' \in X'$，使得 $x' - x < \bar{y} - y$（$0 < x' - x < \frac{1}{n}$，$\frac{1}{n} < y - \tilde{y}$（在有理数中这一点总能做到）），那么 $\bar{\bar{y}} = y + (x' - x) < \bar{y}$ ∴ $\bar{\bar{y}} \in Y$ ∴ $\bar{\bar{y}} - x' \in Z$ ∴ $y = \underbrace{\bar{\bar{y}} - x'}_{\in Z} + \underbrace{x}_{\in X} \in X+Z$ ∴ $Y \subset X+Z$

∴ 综上 $X+Z=Y$

练习 (正负性). 对于 $X \in \mathcal{R}$，如果 $X > \bar{0}$，我们就称 X 是正的；如果 $X < \bar{0}$，我们就称 X 是负的。

1) 证明，X 是正的当且仅当 X 中有正的有理数。

2) 证明，X 是正的当且仅当 $-X$ 是负的。

1) 证明：($\Rightarrow$) $X > \bar{0}$ ∴ $X \setminus \bar{0}$ 非空，取 $x \in X \setminus \bar{0}$，由于 X 是一个 Dedekind 分割，∴ 有 $\bar{x} \in X$ 使得 $\bar{x} > x$ ∴ 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{n} < \bar{x} - x$ ∴ $\frac{1}{n} + x < \bar{x}$ ∴ $\frac{1}{n} + x \in X$ ∵ $\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + x \in X$ ∴ X 中有正有理数

（我总感觉他想让我证的不是这个玩意，但我也不清楚哪些性质能用哪些不能，所以也不知道对错）

($\Leftarrow$) 取 $\frac{p}{q} \in X$，$\frac{p}{q}$ 为正有理数 ∴ $\frac{p}{q} \in \bar{0}'$ ∴ 对于任何 $x \in \bar{0}$，都有 $x < \frac{p}{q}$ 又∵ $\frac{p}{q} \in X$，X 为 Dedekind 分割 ∴ $x \in X$ ∴ $X \geq \bar{0}$ 又∵ $\frac{p}{q} \in \bar{0}'$，$\frac{p}{q} \in X$ ∴ $X > \bar{0}$ ∴ X 为正

上方的证明是不合适的

（因为X是ℚ的子集）☆

实际上可以直接从定义走 ($\Rightarrow$) 若 X 中无正有理数，∵ $X > \bar{0}$ ∴ X 包含负有理数和 0 ∴ 则 0 为 X 的最大元，矛盾

($\Leftarrow$) 若 X 中不包含某个负有理数，设其为 x，$x < \frac{x}{2} \in X$，矛盾

2) ($\Rightarrow$) 若不然，设有 $\tilde{x} \in -X$ 且 $\tilde{x} \in \bar{0}$。根据定义，$-X = \{y - x' \mid y \in \bar{0},\ x' \in X\}$ $\therefore$ 令 $\tilde{x} = y - x'$ $\therefore \tilde{x} + x' = y \in \bar{0}$ $\because X > \bar{0}$，对于所有 $x \in X$，$x' > x$ $\therefore x' > 0$ $\therefore \tilde{x} < \tilde{x} + x'$ $\therefore \tilde{x} \in \bar{0}$，矛盾

（盲猜还是绕弯路了）

($\Leftarrow$) $\because -X < \bar{0}$ $\therefore X + (-X) < X$ $\therefore \bar{0} < X$ (由(F5)可知) $\therefore X$ 为正 $\boxed{\text{问题保留}}$

（直接拿来用了。$-X$ 就这么定义的，还能咋证）

下面是习题：

习题 A：课堂内容的补充

A1) 假设非空集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有上界并且实数 M 是 X 的上界。证明，如下两个命题等价：

- $M = \sup X$。
- 对任意的 $\varepsilon > 0$，都存在 $x \in X$，使得 $x > M - \varepsilon$。

证明：($\Rightarrow$) 若不然，则对于某个 $\varepsilon > 0$，不存在 $x \in X$ 使 $x > M - \varepsilon$ $\therefore x \leq M - \varepsilon$ $\therefore M - \varepsilon$ 也为上界且小于 M，矛盾；($\Leftarrow$) 若不然，则存在 $M' < M$ 且为上界 $\therefore$ 令 $\varepsilon = M - M'$ $\therefore$ 存在 $x \in X$，s.t. $x > M'$ 矛盾。

A2) 证明，每个非空开区间都包含无限多个有理数。

证明：同 Dedekind 那个引理或有理数稠密性 (?) 好像都不太好

若 $a, b \in \mathbb{Q}$，总有 $n \in \mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{n} < b - a$ $\therefore a < a + \frac{1}{n} < b$ (1)，$a + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$，即为所求，对 $(a + \frac{1}{n}, b)$ 进行同样操作可知其中有无限有理数；若 $a \in \mathbb{Q}$，$b \notin \mathbb{Q}$，根据 (1)，总有 $n \in \mathbb{N}$ s.t. $n(b - a) \geq 1$ $\therefore b \geq a + \frac{1}{n}$ $\because a + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ $\therefore a + \frac{1}{n} \neq b$ $\therefore$ 对 $(a, a + \frac{1}{n})$ 进行 (1) 操作即可；若 $a \notin \mathbb{Q}$，$b \in \mathbb{Q}$，总有 $n \in \mathbb{N}$，s.t. $n(b - a) \geq 1$ $a \leq b - \frac{1}{n}$ $\because b - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ $\therefore a \neq b - \frac{1}{n}$ $\therefore$ 对 $(b - \frac{1}{n}, b)$ 进行 (1) 操作即可

A3) (X, d) 是距离空间，$Y \subset X$。我们定义 Y 上的距离函数:

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2).$$

证明，d_Y 是 Y 上的距离函数，从而 (Y, d_Y) 是度量空间。我们称 d_Y 是 d 在 Y 上的**诱导度量**，(Y, d_Y) 称作是 (X, d) 的**子（度量）空间**。（提示：直接验证定义）

证明：显然。

A4) $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{个}} = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$。对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$，我们定义

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n).$$

证明，$(\mathbb{R}^n, d)$ 是度量空间。（我们默认开方运算和中学的一致，尽管我们现在没有定义开方运算）

证明：性质 (1)(2) 是显然的。下面证明 (3)，即 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

定义 $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$，$x, y \in \mathbb{R}^n$（实际上就是向量内积的定义），$\therefore$ 有 $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

（即 $(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2$，由 $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$ 可知，不过似乎这里不能用）$\therefore d(x, y)^2 = \langle x - y, x - y \rangle$

$= \langle (x-z)+(z-y), (x-z)+(z-y) \rangle = \langle x-z, x-z \rangle + 2\langle x-z, z-y \rangle + \langle z-y, z-y \rangle$

$\le d(x,z)^2 + 2\sqrt{\langle x-z, x-z \rangle}\sqrt{\langle z-y, z-y \rangle} + d(z,y)^2 = d(x,z)^2 + 2d(x,z)d(z,y) + d(z,y)^2$

$= [d(x,y)+d(y,z)]^2 \quad \therefore d(x,z) \le d(x,y) + d(z,y)$

（证明 $\langle x, y \rangle^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$：

Using (1.1.3) we have

$$\begin{cases} \langle x, x\rangle \ge 0, \\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \\ \langle tx+z, y\rangle = t\langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle, \\ \langle x, y+tz\rangle = \langle x, y\rangle + t\langle x, z\rangle. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle x-ty, x-ty\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \\ &= \gamma - 2\beta t + \alpha t^2 \equiv q(t), \end{aligned}$$

where $\gamma = \langle x, x\rangle, \beta = \langle x, y\rangle, \alpha = \langle y, y\rangle$. Thus $q(t)$ is a quadratic polynomial in the variable t. Since $q(t) \ge 0$ for all t, the graph of $q(t)$ stays above the x-axis, except that it might be tangent at a single point; that is, $q(t) = 0$ has at most one real root. From the quadratic formula we get that $0 \ge 4\beta^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta^2 - \alpha\gamma)$. Therefore,

$$0 \ge \beta^2 - \alpha\gamma = \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

proving the inequality. ■ ）

A5)（重要）给定距离空间 (X, d)，$Y \subset X$ 是子集。如果对任意的 $x \in X$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，都存在 $y \in Y$，使得 $d(y, x) < \varepsilon$，我们就称 Y 在 X 中是**稠密的**。证明，有理数在 $\mathbb{R}$ 中（距离函数由两个数的差的绝对值定义）是稠密的。

证明：见 7.15 笔记。

A6) 对于 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，如果它的坐标 x 和 y 都是有理数，我们就称这个点是有理点。证明，$(\mathbb{R}^2, d)$（参见习题 A4)）中的有理点是稠密的。

证明：同 (A2) 的方法应是可行的。

A7) 证明，假定域公理 **(F)** 和序公理 **(O)**，确界原理可以推出 Archimedes 公理 **(A)**。

证明：假设 (A) 是错误的，则存在 $x>0$，$y \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall n$，$nx<y$。令 $S=\{nx \mid n \in \mathbb{N}, x>0\}$。$\therefore$ S 有界且 y 为 S 的一个上界。设 E 的上确界为 M，由 (A1) 知，对于任何 $\varepsilon>0$，都有 $n_0 x \in S$，s.t. $n_0 x > M-\varepsilon$。$\therefore$ 取 $\varepsilon = x$ $\therefore (n_0+1)x > M$ $\because n_0+1 \in \mathbb{N}$ $\therefore (n_0+1)x \in S$ $\therefore$ M 为 S 上确界矛盾

A8)（无理数的存在性）令 $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$，这是一个有界的集合。令 $\sqrt{2} = \sup X$。证明，$\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明：若 $\sqrt{2} \in X$，则 $(\sqrt{2})^2 = 2$ 且 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\therefore (\frac{p}{q})^2 = 2$ $\therefore p^2 = 2q^2$ $\therefore$ p 是偶数，设 $p = 2c$ $\therefore 4c^2 = 2q^2$ $\therefore 2c^2 = q^2$ $\therefore$ q 是偶数 $\therefore \gcd(p,q) = 2 \ne 1$ $\therefore$ 矛盾 $\therefore \sqrt{2} \notin X$ $\therefore \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

A9) 证明，每个开区间总包含无限多个无理数。

证明：对于 r_1、$r_2 \in (a,b)$，$r_1 < r_2$ 且均为有理数，由 (A8) 知 $\sqrt{2}$ 为无理数，若 $\sqrt{2} \in (r_1, r_2)$，则易知命题成立；若 $\sqrt{2} \notin (r_1, r_2)$，则有 $n_1(r_2 - r_1) > \sqrt{2}$ $\therefore r_1 < \frac{\sqrt{2}}{n_1} + r_1 < r_2$，用此操作易知命题成立。