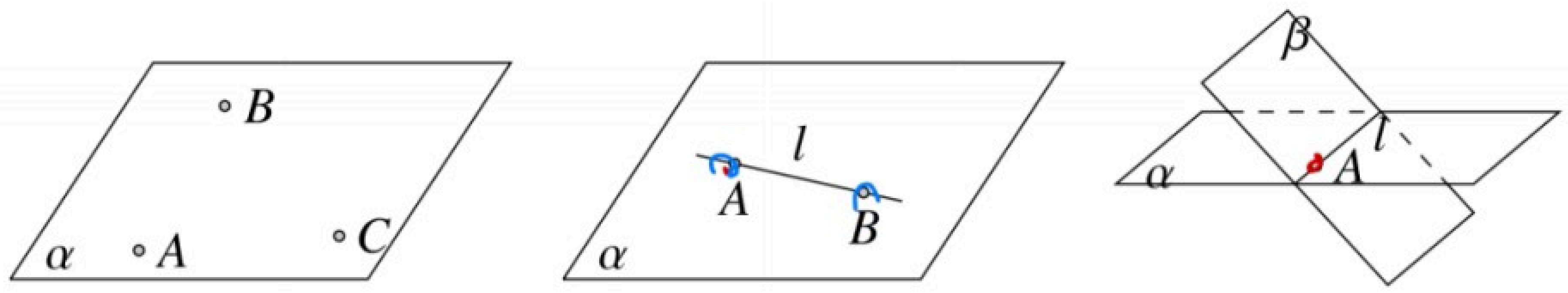
# Informal Notes on Mathematics

2022.07.19

今天开始补之前落下没学的立体几何。

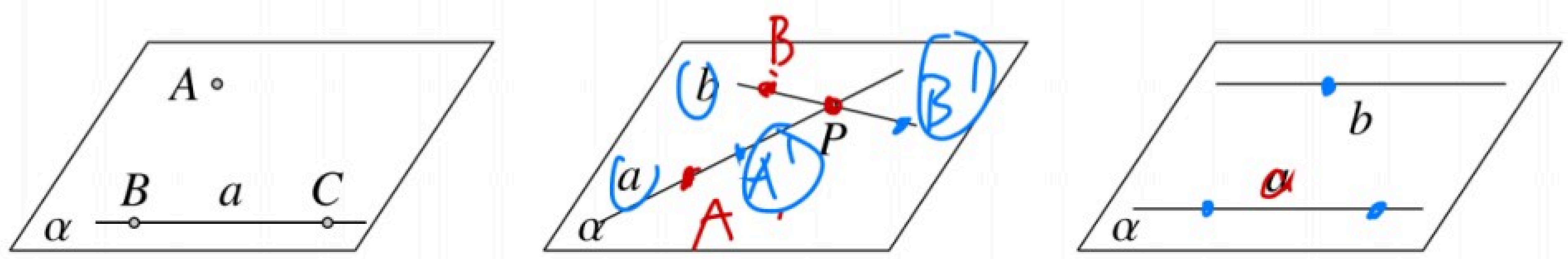
**公理** 179 (立体几何基本公理). 立体几何中点, 直线, 平面的关系由如下三条公理构成:

1. 过不在一条直线上的三个点, 有且只有一个平面. 唯一性
2. 如果一条直线上的两个点在一个平面内, 那么这条直线在这个平面内.
3. 如果两个不重合的平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条过该点的公共直线.




**推论** 180 (点线面关系). 1. 经过一条直线和这条直线外一点, 有且只有一个平面.

2. 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.
3. 经过两条平行直线, 有且只有一个平面.




1) 推导：在 $a$ 上取两点 $B,C$，若 $A,B,C$ 共线，则 $A\in a$，矛盾；若不共线，则 $A,B,C$ 共面，即A与a确定一个平面 $\alpha$；（唯一性）若另取 $B',C'\in a$，则 $B',C'\in a\subseteq\alpha$，$A,B',C'$ 确定的平面仍是 $\alpha$，$\therefore A,\alpha$ 确定唯一平面。

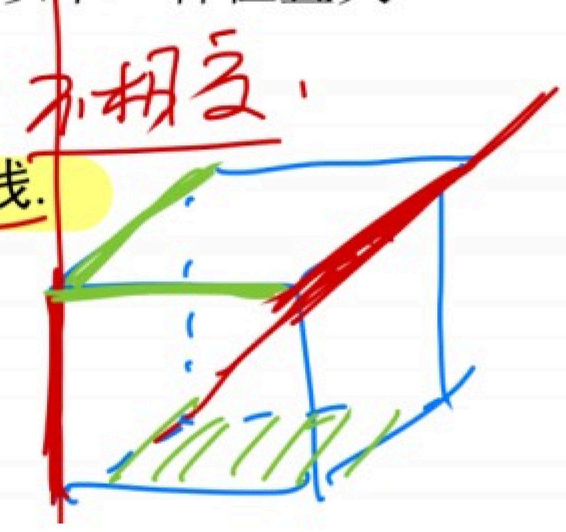
2) 推导：设交点为 $P$，$A\in a\setminus\{P\}$，$B\in b\setminus\{P\}$。若 $A,B,P$ 共线，则 $a,b$ 重合，矛盾；若不共线，$\therefore A,B,C$ 三点确定一个平面 $\alpha$；（唯一性）由公理1，$\because A,P\in\alpha$，$\therefore a\subseteq\alpha$，$\because B,P\in\alpha$ $\therefore b\subseteq\alpha$ $\therefore a,b$ 确定唯一平面

3) 推导：在 $a$ 上取两点 $A,A'$，在 $b$ 上取一点 $B$，若三点共线，则 $a\cap b\neq\emptyset$，矛盾；$\therefore$ 三点不共线 $\therefore A',A,B$ 确定平面 $\alpha$；（唯一性）若 $\alpha$ 不唯一，设另个平面为 $\beta$，则 $a,b\subseteq\alpha$ 且 $a,b\subseteq\beta$，$\therefore \alpha\cap\beta=\{a,b\}$，与公理三矛盾 $\therefore a,b$ 确定唯一平面。

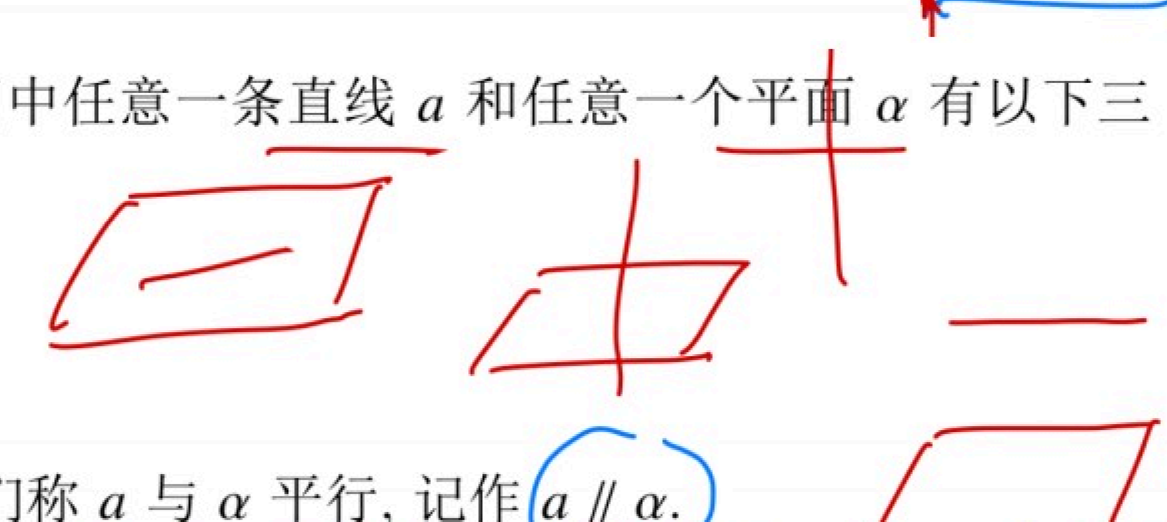
**定义** 181 (空间中直线与直线的位置关系). 空间中任意两条不重合的直线 $a,b$ 有以下三种位置关系:

不相交.

1. $a,b$ 不共面, 即不存在一个平面 $\alpha$ 同时包含 $a,b$. 此时 $a,b$ 为两条异面直线.
2. $a,b$ 共面, 并且 $a,b$ 相交于一点. 此时 $a,b$ 为两条相交直线.
3. $a,b$ 共面, 并且 $a,b$ 平行. 此时 $a,b$ 为两条平行直线. 不相交.

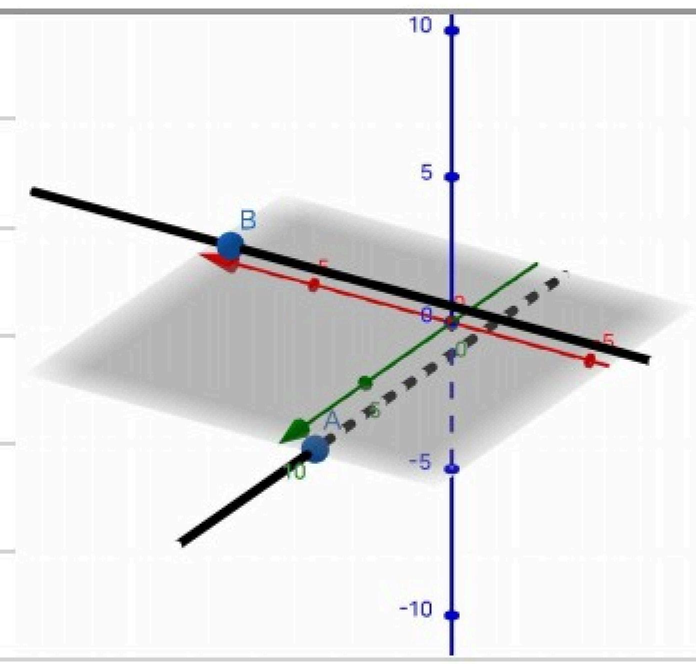


**定义** 182 (空间中直线与平面的位置关系). 空间中任意一条直线 $a$ 和任意一个平面 $\alpha$ 有以下三种位置关系:



1. $a\subset\alpha$, 即直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内.
2. 直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 有且仅有一个交点.
3. 直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 没有任何交点, 此时我们称 $a$ 与 $\alpha$ 平行, 记作 $a\parallel\alpha$.

见下页图 与同一平面平行的两条直线不一定平行!!




讨论α与a交点个数:
0个 → 平行
1个 → 相交
≥2个 → $a \subseteq \alpha$

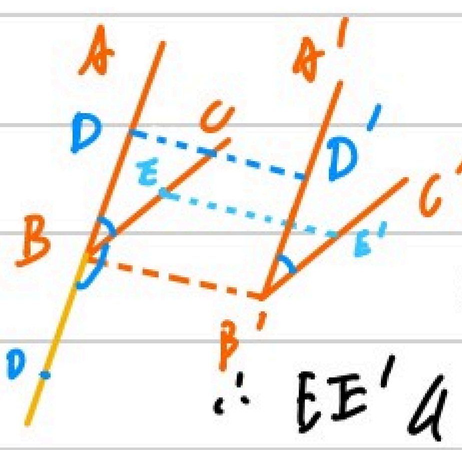
**定义** 183 (空间中两个平面的位置关系). 空间中任意两个平面 $\alpha, \beta$ 有以下两种位置关系

1. $\alpha, \beta$ 相交于一条直线.
2. $\alpha, \beta$ 不相交, 此时称这两个平面互相平行, 记作 $\alpha \parallel \beta$.

$\alpha, \beta$ 有交 → (公理3) 相交于一条直线；$\alpha, \beta$ 无交 → 平行

**公理** 184. 空间中平行于同一条直线的两条直线互相平行.

**定理** 185. 如果空间中两个角的两条边分别对应平行, 那么这两个角相等或互补.




$AB \parallel A'B' \Rightarrow \alpha$ 过 $AB$、$A'B'$　$BC \parallel B'C' \Rightarrow \beta$ 过 $BC$、$B'C'$
在 $AB$、$A'B'$ 上分别取 $BD = B'D'$. 在 $\alpha$ 内, $BD \overset{\parallel}{=} B'D'$, 不妨作 ▱$BDD'B'$
(若为 ▱$BDB'D'$, 作 $D''$ 与 $D$ 关于 $B$ 对称) ∴ $DD' \parallel BB'$ 同理取 $BE = B'E'$
∴ $EE' \parallel BB'$ ∴ $DD' \parallel EE'$ ∴ 有▱$DD'E'E$ ∴ $DE = D'E'$ ∴ 可证 $\triangle DBE \cong \triangle D'B'E'$
也可以通过解三角形表示出角的大小 (如果认为全等只是平面上的关系) 互补情况亦然

**定理** 186 (直线与平面平行的判定定理). 如果平面 $\alpha$ 外一条直线 $l$ 与 $\alpha$ 内的一条直线 $a$ 平行, 那么 $l \parallel \alpha$. $l \parallel a$, $a \subseteq \alpha \Rightarrow l \subseteq \alpha$

证明: 由 $l \parallel a$, 过 $l$ 与 $a$ 有唯一平面 $\beta$ (由推论 180.3) ∵ $l \subseteq \beta$, $l \not\subseteq \alpha$ ∴ $\alpha, \beta$ 交于直线 $a$ ∵ $l$ 与 $a$ 无交 ∴ $l$ 与 $\alpha$ 无交 ∴ $l \parallel \alpha$

**定理** 187 (直线与平面平行的性质). 一条直线 $a$ 与一个平面 $\alpha$ 平行, 如果过该直线的平面 $\beta$ 与 $\alpha$ 相交, 那么 $a$ 与交线 $l$ 也平行.

证明: $a, l \subseteq \alpha$　若 $a \not\parallel l$, 则 $a \cap l \neq \varnothing$ ∵ $l \subseteq \alpha$ ∴ $a \cap l \subseteq a \cap \alpha$ ∵ $a$ 与 $\alpha$ 平行
∴ $a \cap \alpha = \varnothing$, 矛盾 ∴ $a \parallel l$

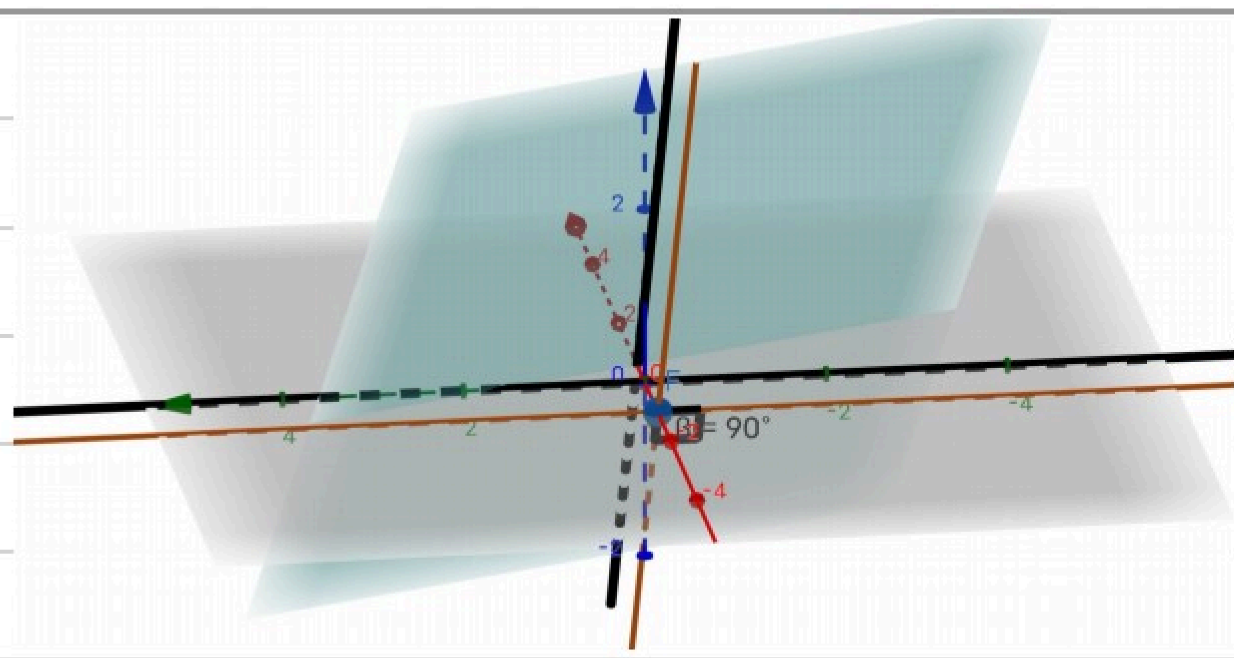
**定理** 188 (两个平面平行的判定). 如果一个平面内的两条相交直线都与另一个平面平行, 那么这两个平面平行.

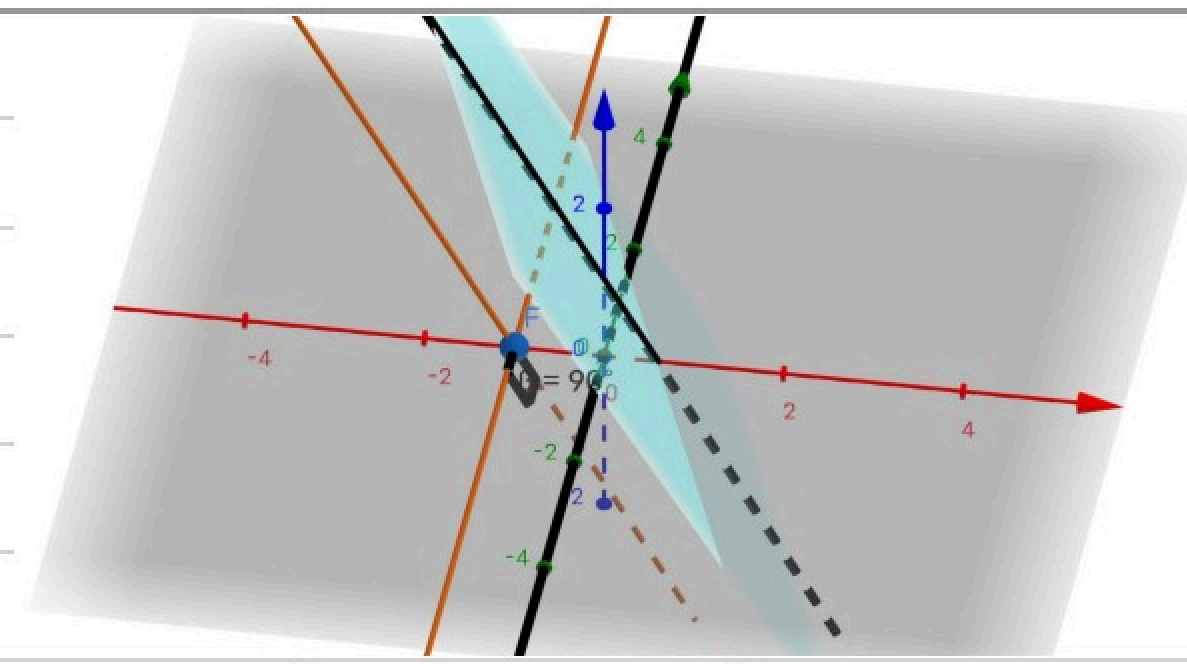
证明: 设两个平面为 $\alpha, \beta$, $a, b \subseteq \alpha$, $a \cap b = \{P\}$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$. ∴ $(a \cup b) \cap \beta = \varnothing$ 若 $\alpha, \beta$ 不平行
则设 $\alpha, \beta$ 交于直线 $l$ ∵ $a \cap \beta = \varnothing$ ∴ $a \cap l = \varnothing$ ∴ $a \parallel l$, 同理 $b \parallel l$ ∴ $a \parallel b$, 与 $a, b$ 相交矛盾 ∴ $\alpha \parallel \beta$

**定理** 189 (两个平面平行的性质). 两个平面平行, 如果另一个平面与这两个平面相交, 那么两条交线平行.

证明: ∵ $\alpha \parallel \beta$ ∴ $\alpha \cap \beta = \varnothing$ ∵ $a \subseteq \alpha$, $b \subseteq \beta$ ∴ $a \cap b = \varnothing$ ∴ $a, b$ 无交 ∵ $a, b$ 共面 ∴ $a \parallel b$

**定义** 190 (空间中两直线的夹角). 已知两条空间中的直线 $a, b$, 过空间中任意一点 $O$ 作直线 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, 那么我们定义 $a, b$ 之间的夹角为 $a', b'$ 之间的夹角. 特别地, 若这两条直线形成的夹角为 $90°$, 那么我们称这两条直线垂直, 记为 $a \perp b$. 即将两直线作到同一平面内





**定义** 191 (直线与平面垂直). 如果一条直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 中的每一条直线都垂直, 那么我们称 $l$ 与 $\alpha$ 垂直, 记为 $l \perp \alpha$. 这时 $l$ 与 $\alpha$ 的交点称为它们的垂足.

$l$与$\alpha$一定有交点，证明：

若不然，设$l // \alpha$，过$l$作平面$\beta$与$\alpha$相交于$l'$ $\therefore l // l'$ $\because l' \subseteq \alpha$ $\therefore l \perp l'$ $\therefore$ 矛盾

$\therefore l$与$\alpha$有交点

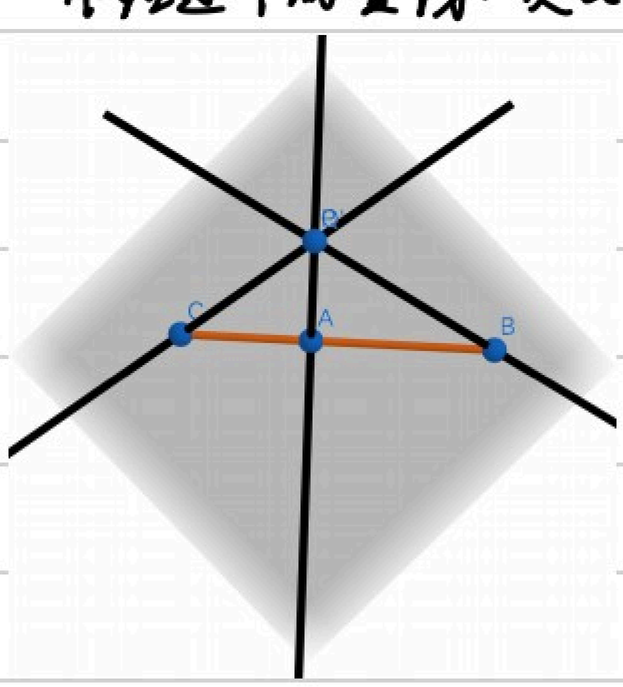
**定理** 192 (线面垂直的判定). 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直, 那么该直线与此平面垂直.

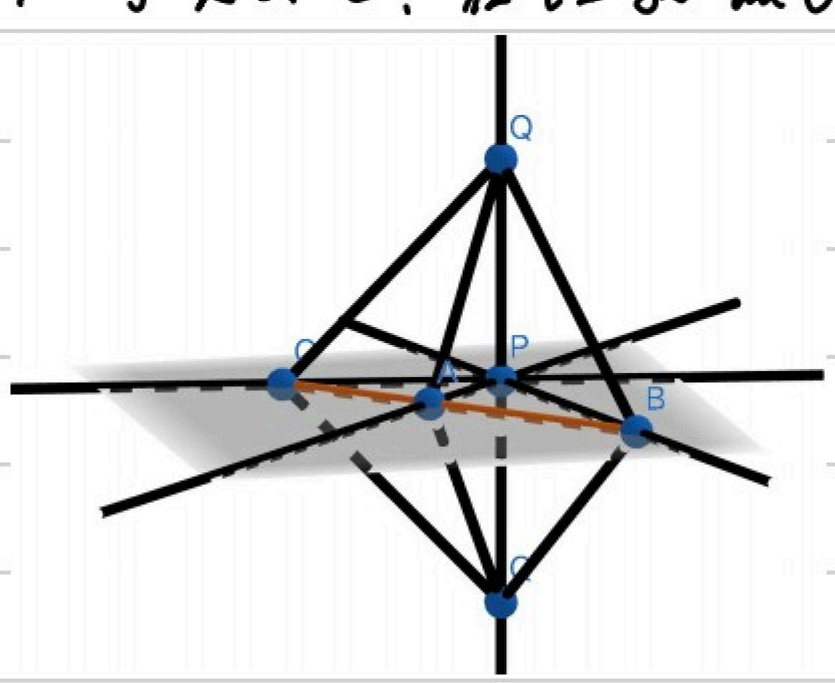
证明：$l \perp a$，$l \perp b$，$a \cap b \neq \varnothing$，$a, b \subseteq \alpha$

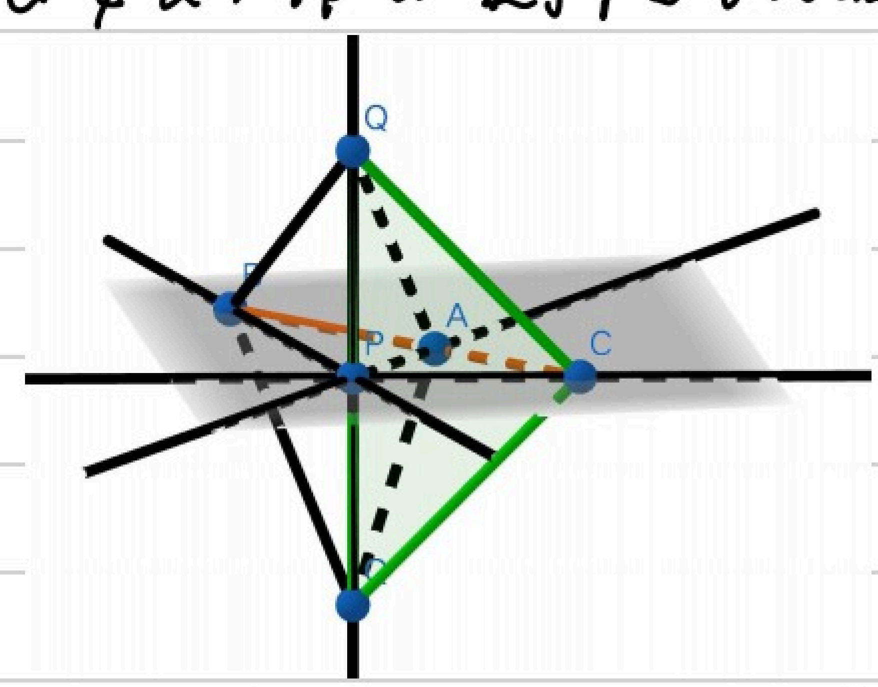
若$l \subseteq \alpha$，$l \perp a$，$l \perp b \Rightarrow a // b$，与$a$、$b$相交矛盾；

若$l // \alpha$，过$l$作$\beta$交$\alpha$于$l'$，$\therefore l' // l$ $\therefore l' \perp a$，$l' \perp b$ $\therefore a // b$，矛盾；

$\therefore l$与$\alpha$相交，设$l$与$\alpha$交于$P$，异于$a$、$b$的直线为$c$，$c \subseteq \alpha$ 过$P$作$a' // a$，$b' // b$，$c' // c$，作不经过$P$的直线，交$a'$，$b'$，$c'$于$A$、$B$、$C$，在$l$上取一点$Q$，$Q \notin \alpha$，作$Q'$关于$P$与$Q$对称








$\because AP$垂直平分$QQ'$，$BP$垂直平分$QQ'$ $\therefore AQ = AQ'$，$BQ = BQ'$ $\because A$、$B$、$C$共线，$Q$为直线外一点，

$\therefore A$、$B$、$C$、$Q$共面 $\because AQ = AQ'$，$AB = AB$，$BQ = BQ'$ $\therefore \triangle QAB \cong \triangle Q'AB$ $\therefore \angle QBC = \angle Q'BC$ $\therefore \triangle QBC \cong \triangle Q'BC$

$\therefore QC = Q'C$ $\therefore \triangle QCQ'$等腰 $\because P$为$QQ'$中点 $\therefore CP \perp QQ'$（三线合一），即$c' \perp l$ $\therefore c \perp l$ $\therefore l \perp \alpha$

**定理** 193 (线面垂直的性质). 1. 若两条平行直线中, 有一条与一个平面垂直, 那么另一条也与该平面垂直. (夹角/垂直定义) $\alpha$

2. 过一点且与已知平面垂直的直线有且只有一条.

3. 若两条直线垂直于同一个平面, 那么这两条直线平行.

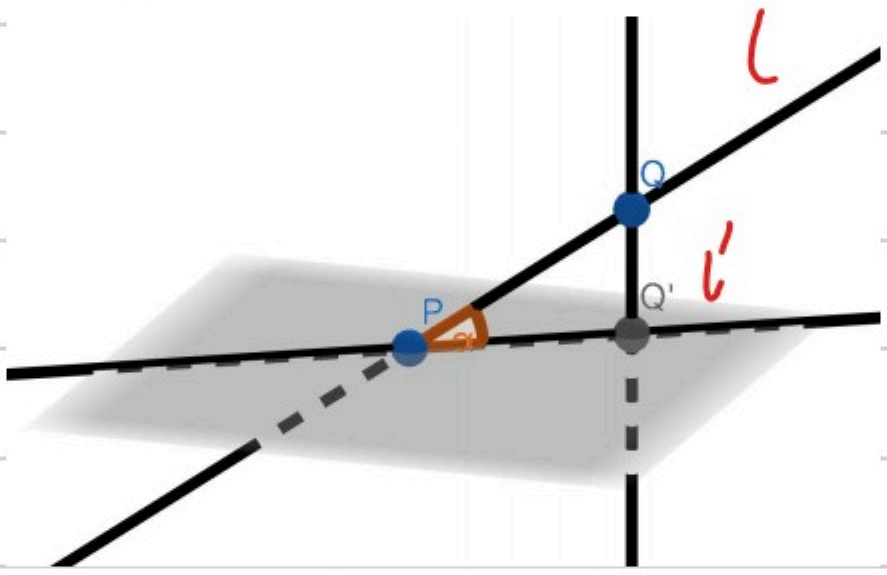
1) 显然。

2) (唯一性) 若$a \perp \alpha$，$b \perp \alpha$，则$a // b$ $\therefore a \cap b = \varnothing$ $\therefore$ 矛盾 (存在性) 设该点为$P$，作$l' \perp \alpha$，过$P$作$l // l'$

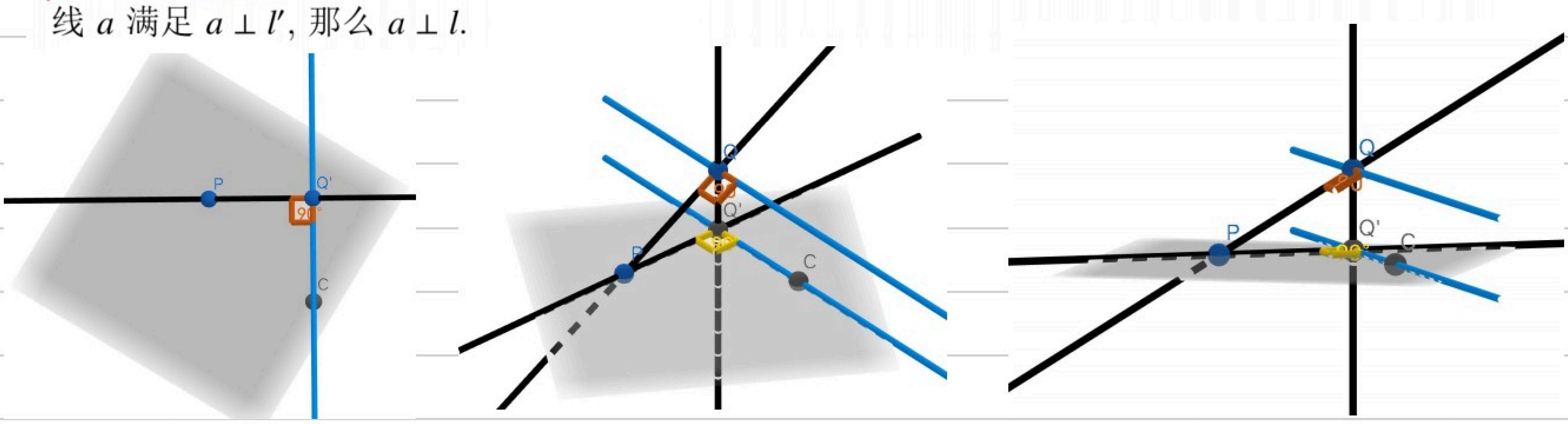
3) 证$a$、$b$共面 (?) 这课上直接用了这个结论，manyaoasda.

问题保留

**定义** 194 (直线与平面的夹角). 若直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 垂直, 那么我们记 $l$ 与 $\alpha$ 之间的夹角为 $90°$. 若 $l \parallel \alpha$, 那么我们记 $l$ 与 $\alpha$ 之间的夹角为 0. 若以上两种情况均不成立, 那么我们记 $P = l \cap \alpha$, 取 $l$ 上异于 $P$ 的一点 $Q$, 作过 $Q$ 且垂直于 $\alpha$ 的直线, 设该直线与 $\alpha$ 交于点 $Q'$, 记 $l' = PQ'$, 那么我们将 $l, l'$ 之间的夹角称为 $l$ 与 $\alpha$ 的夹角. 我们也将 $l'$ 称为 $l$ 在 $\alpha$ 上的投影.



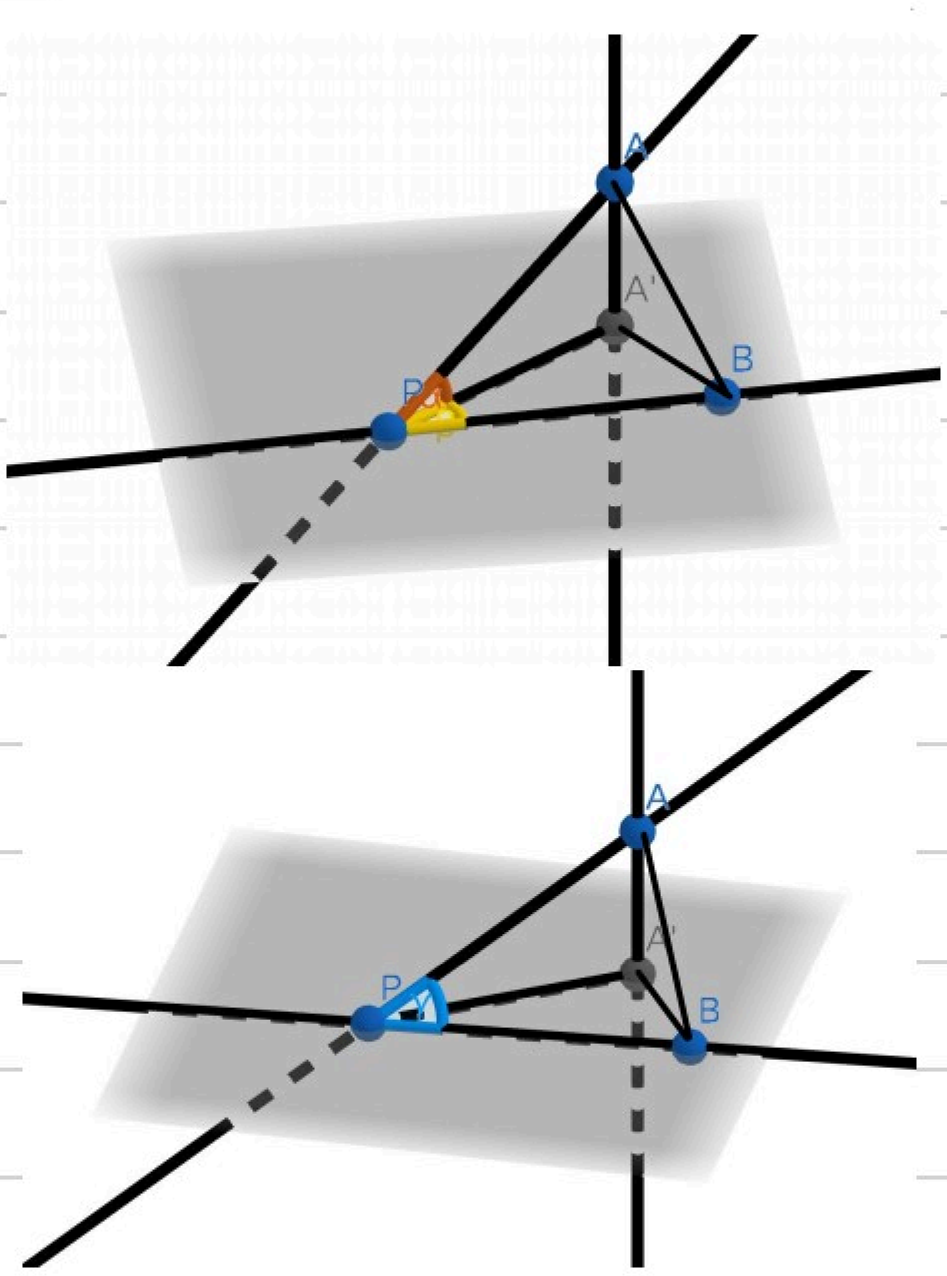

**定理** 195 (三垂线定理). 如果直线 $l$ 与 $\alpha$ 相交于一点, 且 $l$ 在 $\alpha$ 上的投影为 $l'$, 而 $\alpha$ 内的一条直线 $a$ 满足 $a \perp l'$, 那么 $a \perp l$.




过Q作 $QQ' \perp \alpha$ ∴过 $Q'$ 和 $PQ$ 作平面 $\beta$，由题意，有 $CQ' \perp PQ'$ ∵ $QQ' \perp \alpha$ ∴ $QQ' \perp CQ'$ ∵ $PQ'$、$QQ'$ 为 $\beta$ 中两条相交直线 ∴ $CQ' \perp \beta$ ∴ $CQ' \perp PQ$，即 $a \perp l$

**定理** 196 (三余弦定理). 设 $P$ 为平面 $\alpha$ 上的一点, 过 $\alpha$ 外一点 $A$ 的直线 $PA$ 在 $\alpha$ 上的投影为 $PA'$, $PB$ 为 $\alpha$ 上的另一条直线, 那么 $\angle APB, \angle A'PB, \angle APA'$ 三个角满足:

$$\cos \angle APB = \cos \angle APA' \cdot \cos \angle A'PB$$




证明: $A'P = AP \cos\angle APA'$, $A'P = BP \cos\angle A'PB$

$AA' = AP \sin\angle APA'$, $A'B = BP \sin\angle A'PB$

$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP \cos\angle APB$

$= AP^2 \cdot \sin^2\angle APA' + BP^2 \sin^2\angle A'PB$

$= AP^2 + BP^2 - \cos^2\angle APA' \cdot AP^2 - BP^2 \cdot \cos^2\angle A'PB$

$\therefore \cos^2\angle APA' \cdot AP^2 - 2\cos\angle APB \cdot AP \cdot BP + \cos^2\angle A'PB \cdot BP^2 = 0$

$\because AP \cos\angle APA' = BP \cos\angle A'PB$

$\therefore \cos^2\angle APA' \cdot AP^2 - 2\cos\angle APA' \cdot \cos\angle A'PB \cdot AP \cdot BP + \cos^2\angle A'PB \cdot BP^2 = 0$

$\therefore \cos\angle APB = \cos\angle APA' \cdot \cos\angle A'PB$

**定义** 197 (二面角). 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 这条直线叫做二面角的棱, 这两个半平面叫做二面角的面. 若棱为 $l$, 面分别为 $\alpha,\beta$, 那么这个二面角记为 $\alpha-l-\beta$. 若 $P,Q$ 是 $l$ 上的两个不同的点, $A,B$ 分别是 $\alpha,\beta$ 上不在 $l$ 上的两个点, 那么这个二面角也可以简记为 $\alpha-PQ-\beta$, $A-PQ-B$, $A-l-B$ 等.

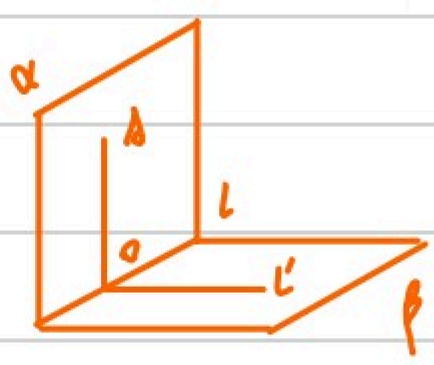
**定义** 198 (二面角的平面角). 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 $l$ 上任取一点 $O$, 以 $O$ 为垂足, 在半平面 $\alpha,\beta$ 内分别做垂直于 $l$ 的射线 $OA, OB$, 则我们称 $\angle AOB$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角, 平面角的大小也可称为二面角的大小. 特别地, 若一个二面角的大小为 $90°$, 那么我们称形成二面角的两个平面 $\alpha,\beta$ 互相垂直, 记为 $\alpha\perp\beta$.

**定理** 199 (面面垂直的判定). 如果一个平面过另一个平面的垂线, 那么这两个平面垂直.

证明：设 $\alpha$、$\beta$ 交于 $l$，$l'\subseteq\alpha$，$l'\perp\beta$ ∴ $l'\perp l$，取 $l$ 与 $l'$ 交点为 $O$，在 $\beta$ 上作 $OB\perp l$

∵ $l'\perp\beta$ ∴ $l'\perp OB$ ∴ $\alpha-l-\beta=90°$ ∴ $\alpha\perp\beta$

**定理** 200 (面面垂直的性质). 两个面垂直, 如果一个平面内有一直线垂直于这两个平面的交线, 那么这条直线与另一个平面垂直.




证明：$l'\perp l$，$\alpha\perp\beta$ 设 $l'$ 与 $l$ 交于 $O$，作 $OA\perp l$，$A\in\alpha$

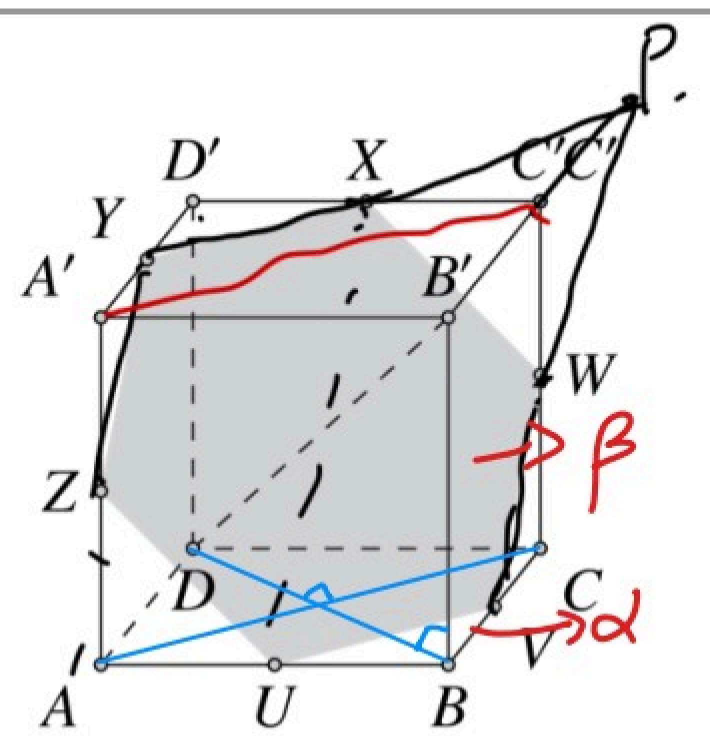
∵ $\alpha\perp\beta$ ∴ $\angle AOl'=90°$ ∴ $l'\perp AO$ ∵ $AO$、$l\subseteq\alpha$ ∴ $l'\perp\alpha$

**例** 201. 下列所有命题中, 希腊字母表示的是平面, 小写拉丁字母表示的是直线. 判断下列命题的正误, 正确的请给出证明, 错误的请举出反例:

1. 若 $\alpha\perp\beta$, $a\subset a$, $b\subset\beta$, 则 $a\perp b$. (×)
2. 若 $\alpha\parallel\beta$, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, 则 $a\parallel b$. (×)
3. 若 $a\perp b$, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$. (×)
4. 若 $a\perp\alpha$, $a\parallel b$, $b\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$. (√)
5. 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$. (~~√~~) (×)
6. 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\alpha$, 则 $a\parallel b$. (×)
7. 若 $\alpha\nparallel\beta$, 则 $\alpha$ 内不存在平行于 $\beta$ 的直线. (×)
8. 若 $a\nparallel b$, 那么 $a,b$ 不可能垂直于同一个平面. (√)
9. 若 $a\perp b$, $b\parallel c$, $c\perp d$, 则 $a\perp d$. (×) 也可能平行或相交(夹角≠90°)
10. 若 $a\perp b$, $b\parallel c$, $c\perp d$, 则 $a\parallel d$. (×) 同上

**例** 202. 已知 $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个正方体, 记 $AB, BC, CC', C'D', A'D', AA'$ 的中点依次为 $U,V,W,X,Y,Z$.

1. 证明: $U,V,W,X,Y,Z$ 共面, 并且 $UVWXYZ$ 是一个正六边形.
2. 证明: 平面 $UVWWXYZ$ 与 $B'D$ 垂直.




1) 证明：延长 $B'C'$ 至 $P$，使 $PC' = \frac{1}{2}B'C'$ $\therefore \triangle D'XY \cong \triangle C'XP$

$\therefore Y、X、P$ 共线 $\therefore$ 同理 $P、W、V$ 共线 $\therefore X、Y、W、V$ 共面

同理 $Z、U、Y、V$ 共面 $\therefore$ 六点共面

连接 $X、U$ $\therefore XU = BC' = 2WV$ 同理 $YZ = \frac{BC'}{2}$，$YX = UV = \frac{1}{2}A'C$

$XW = ZU = \frac{1}{2}YV = \frac{1}{2}A'B$

$\therefore YX = XW = WV = UV = UZ = AZ$ $\therefore$ 为正六边形

2) 证明：$\because BB' \perp AB$，$BB' \perp BC$ $\therefore BB' \perp \alpha$ $\therefore BB' \perp DB$，$BB' \perp AC$

$\therefore BD$ 为 $B'D$ 在 $\alpha$ 上的投影 $\because AC \perp BD$ $\therefore AC \perp B'D$ $\therefore UV \perp B'D$ 同理 $XW \perp B'D$ $\therefore B'D \perp \beta$

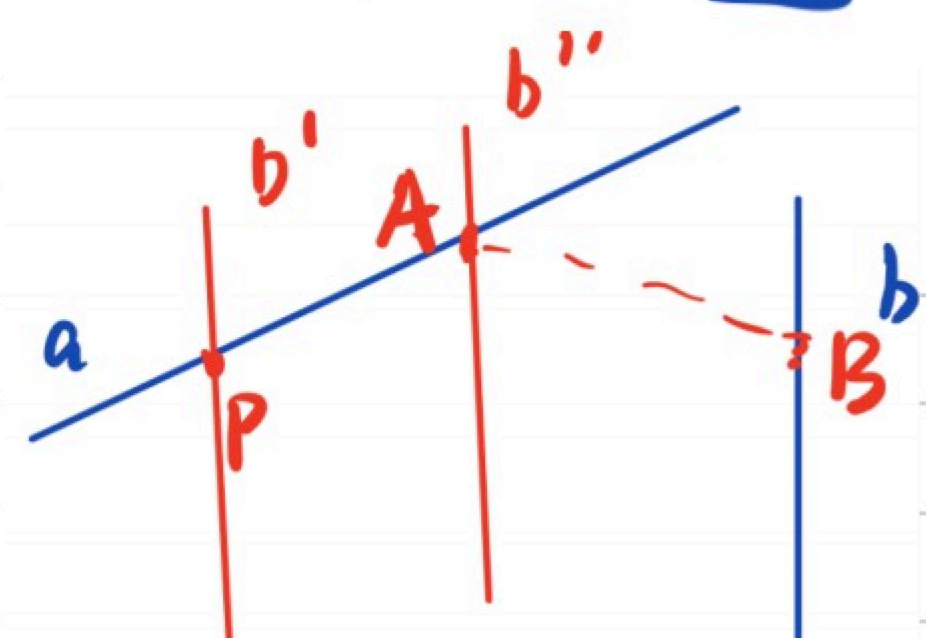
**定义 203** (点到平面的距离). 已知点 $P$ 和平面 $\alpha$, 过 $P$ 作 $\alpha$ 的垂线 $l$, 设 $l \cap \alpha = Q$, 则我们称 $PQ$ 的长度为 $P$ 到平面 $\alpha$ 的距离.

**定义 204** (平行的直线, 平面间的距离). 若直线 $a$ 平行于平面 $\alpha$, 那么 $a$ 上任意一点到 $\alpha$ 的距离称为 $a$ 到 $\alpha$ 的距离. 若平面 $\alpha,\beta$ 互相平行, 那么 $\alpha$ 上任意一点到 $\beta$ 的距离称为两平面间的距离.

**定义 205** (异面直线的距离). 给定两条异面直线 $a,b$, 可作一条直线 $c$ 与 $a,b$ 都垂直且相交, 记 $a \cap c = A$, $b \cap c = B$, 称 $AB$ 为异面直线 $a,b$ 间的距离.

是否存在？

是否唯一？




(存在性) 过 $a$ 上一点 $P$ 作 $b' \parallel b$ $\therefore a、b'$ 共面，设面为 $\alpha$ $\because a、b$ 异面 $\therefore b \parallel \alpha$，在 $\alpha$ 上作 $b$ 的投影 $b''$，$B \mapsto A$，$A$ 为 $b''$ 与 $a$ 交点 $\because AB \perp \alpha$ $\therefore AB \perp a$，$AB \perp b''$ $\therefore AB \perp b$ $\therefore AB$ 是满足条件的线段

(唯一性) 过 $a、b$ 外一点 $O$，作 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，$a'、b'$ 共面 $\beta$

若存在两条直线 $c、c'$ 满足定义，则 $c、c' \perp \beta$ $\therefore c \parallel c'$ $\therefore c、c'$ 共面 $\gamma$ $\therefore c、c'$ 与 $a、b$ 的四个垂足(即交点)共面 $\therefore a、b$ 共面 $\therefore$ 矛盾。