Informal Notes on Mathematics

2022.07.20

今天是计数。我一般来说比较烦这块。

— 枚举法:直接枚举出所有可能,数出结果.

— 加法原理:将集合分成 n 个不交的子集的并,或理解为某一件事有 n 种互斥的可能,在每一种中分别进行计数,分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 个元素,则全集当中有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 个元素.

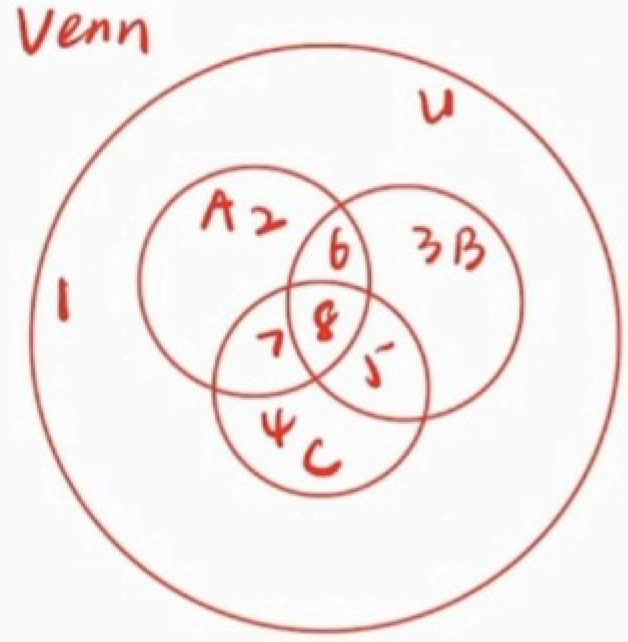
— 乘法原理:将完成一件事分为 n 个步骤,每一个步骤与之前的步骤互相独立.在每一个步骤中分别进行计数,分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 种方法,则完成整件事有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.

— 容斥原理:对于 n 个集合 $A_1, \cdots, A_n$ 其并集的元素个数有如下公式:

$$\left|\bigcup_{k=1}^n A_k\right| = \overset{C_n^1}{\sum_{k=1}^n}|A_k| - \overset{C_n^2}{\sum_{1\le i<j\le n}}|A_i\cap A_j| + \overset{C_n^3}{\sum_{1\le i<j<k\le n}}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\ C_n^n$$

例 344 已知全集 $U=\{1,2,\cdots,n\}$, 从中取出三个子集 A,B,C, 满足两两不交的取法有多少种? 满足 $A\cap B\cap C=\emptyset$ 的取法有多少种? 满足 $A\cup B\cup C=U$ 的取法有多少种?

Venn



两两不交

1到n只放在1.2.3.4区

共 4^n 种

$A\cap B\cap C=\varphi$

1到n只放在 1~7 区

共 7^n 种

$A\cup B\cup C=U$

1到n只放在 2~8 区

共 7^n 种.

例 345 在所有小于等于 2021 的正整数当中, 既不是 6 的倍数, 也不是 8 的倍数的数有多少个?

容斥原理

$2021 = 6\times336+5$

$2021 = 8\times252+5$

$2021 = 24\times84+5$

6的倍数有 336 个

8的倍数有 252 个

24的倍数有 84 个

容斥原理 6或8的倍数有 $336+252-84=504$ 个.

都不是: $2021-504=1517$

排列组合:从n个不同元素中取出m个不同元素

— 取出的顺序不同视为不同的取法,共有多少种取法?

— 取出的顺序不同视为同一种方法,共有多少种取法?

排列数和组合数 以上问题的解分别为 A_n^m, C_n^m

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $\quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

1. 对于一个11项数列 $\{a_k\}$ 满足 $a_1=0$, $a_{11}=4$, 且满足 $|a_{k+1}-a_k|=1$, $k=1,2,\cdots,10$, 求满足条件的数列个数?

解: 考虑 $b_k = a_{k+1}-a_k$

设 $b_1, \cdots, b_{10}$ 中有 x 个 1, y 个 -1

$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$ $(a_1+x-y=a_{11})$ $\Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

∴满足的数列个数 $= C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\times3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

2. 已知圆周上有n个点, 这n个点两两连线, 一共可以连多少条线段?

解: $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

二项式定理 对于任意实数 a,b 和正整数 n, 有

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

3、求 $(\frac{1}{2}x-2y)^5$ 展开式中 x^2y^3 的系数

解: $k=3$ ∴ $C_5^3 = \frac{5!}{3!\times2!} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

∴系数 $= (-2)^3\times(\frac{1}{2})^2\times10 = -20$

4. 求证下列组合恒等式:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{\overset{k}{n}} C_n^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^n \overset{k}{n} C_n^k = n2^{n-1}$$

证明: 1) $\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n$

2) $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$

3) $f(x) = (1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$

∴ $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1}$

∴ $x=1$ 时, $\sum_{k=0}^n = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$

下面开始做一点题目

1. 不同的 Python 书 9 本, 不同的 Matlab 书 7 本, 不同的 English 书 5 本, 从中选出不同学科的书两本, 共几种

解: $9\times7+9\times5+5\times7=143$

2. (1) 从5本不同的书里选3本送给3名同学, 每人各1本, 共几种送法?

解: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5\times4\times3 = 60$

(2) 从5种不同的书里选3本送给3名同学, 每人各一本, 共几种送法?

解: $5\times1 + C_5^2\times6 + A_5^3 = 5+60+60 = 125$

有三人选用一种：$\left.\begin{array}{l} A\ A\ A \\ B\ B\ B \\ \cdots \\ E\ E\ E \end{array}\right\}$ 5种

有两人选用一种：$\left.\begin{array}{lll} (AB)A & A(AB) & (AB)B \\ (BA)B & B(BA) & (BA)A \\ \cdots & & \\ (DE)D & D(DE) & (DE)E \\ (ED)E & E(ED) & (ED)D \end{array}\right\} 6\times C_5^2$

设每人选用一种：$\left.\begin{array}{ll} ABC & BAC \\ ACB & CAB \\ \cdots & \\ DAE & DEA \end{array}\right\} A_5^3$ 种

正常应该用的解法：$5\times5\times5=125$

3、0~9这10个数字，可以组成多少无重复数字的三位数？

解：$A_{10}^3 - A_9^2 = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = 10\times9\times8 - 9\times8$

$= 648$（种） $\underset{1\sim9}{a\times100} + \underset{0\sim9除a}{b\times10} + \underset{0\sim9除a、b}{c}$

正常应该用的解法：$9\times(10-1)\times(10-2) = 648$（种）

4、5本相同的笔记本，3种相同的书，分给8个学生，共几种

解：$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

5、六门课从中选三门，小明和小红至少有两科相同的情况有几种？

解：$C_6^2 \times A_4^2 + C_6^3 = 15\times12 + 20 = 200$

正常做法（为什么我每次做法都不正常）：

$C_6^2\, C_4^1\, C_3^1 + C_6^3 = 15\times12+20 = 200$

6、有甲乙丙丁戊己庚7名护士，每名护士7月1日～7月7日安排一个夜班，则甲的夜班比丙晚一天的排法为

解：$A_6^6 = 6! = 720$

（相当于 $\boxed{丙甲}$ 看成一个整体 和其余5个排列）

7、甲乙丙在内的6名专家，分别去高一高二高三，甲必须去高一，乙、丙不在同一年级，求种数

一	二	三	
			$A_2^2\times3 + A_2^2\times3 + A_2^2\times A_3^3$
甲	0	0	$=2\times3+2\times3+2\times6$
0	0	0	$=6+6+12$
甲	0	0	$=24$
0	0	0	（橙色代表乙/丙，黑色代表非甲/乙/丙）
甲	0	0	（第一种情况，两0排列，0只要确定高二那
0	0	0	个就确定一种情况；第二种同理；第三种两0

需排列，三个0也需要排列）

这个依然不是常规做法，并且第一次做我还错了，需反思。

二项式的性质：

1° $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$

2° $C_n^m = C_n^{n-m}$

3° $C_n^k = C_n^{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}$

4° n为奇数时，$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 且为 C_n^k 最大值

n为偶数时，$C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大

8. $(x^3-\frac{2}{x^6})^6$ 展开式中，二次项系数最大的项的系数

根系数最大

解：$T_{k+1} = C_6^k\, x^{3(6-k)} (-\frac{2}{x^6})^k$

$= (-2)^k C_6^k\, x^{3(6-k)-6k}$

∴ $k=3$时，二次项系数最大，为 $C_6^3 = 20$

∴ 系数为 $20\times(-8) = -160$

9. $(2x-1)^6$ 中各项系数和

解：$(2x-1)^6 = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k 2^{6-k} C_6^k x^{6-k}$

∴系数和 $= \sum_{k=0}^{6}(-1)^k 2^{6-k} C_6^k$

$= \sum_{k=0}^{6}(-1)^k 2^{6-k} C_6^k \times 1^{6-k}$

$= (2\times1-1)^6 = 1$

10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 为 1,2,3,4,5,6的一个排列，则满足 $|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|=3$ 的不同排列个数

解：∵ $a_1\neq a_2\neq\cdots\neq a_6$ ∴ $|a_i-a_j|\geq1$

∴ $|a_1-a_2|=1$, $|a_3-a_4|=1$, $|a_5-a_6|=1$

∴ $\{(a_1,a_2),(a_3,a_4),(a_5,a_6)\} = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

∴ $A_3^3\times A_2^2\times A_2^2\times A_2^2 = 6\times8 = 48$

11. 设集合 $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid x_i\in\{-1,0,1\},\ i=1,2,3,4,5\}$

则A中满足 $1\leq|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|\leq3$ 的元素个数为

解：2个0：$C_5^2\times2^3 = \frac{5\times4}{2\times1}\times8 = 80$

3个0：$C_5^3\times2^2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times4 = 40$

4个0：$C_5^4\times2 = 5\times2 = 10$

∴ $80+40+10 = 130$

12. 用0，1，2，3，4这五个数字组成无重复数字的自然数．

（I）在组成的三位数中，求所有偶数的个数；

（II）在组成的三位数中，如果十位上的数字比百位上的数字和个位上的数字都小，则称这个数为“凹数”，如301，423等都是“凹数”，试求“凹数”的个数；

（III）在组成的五位数中，求恰有一个偶数数字夹在两个奇数数字之间的自然数的个数．

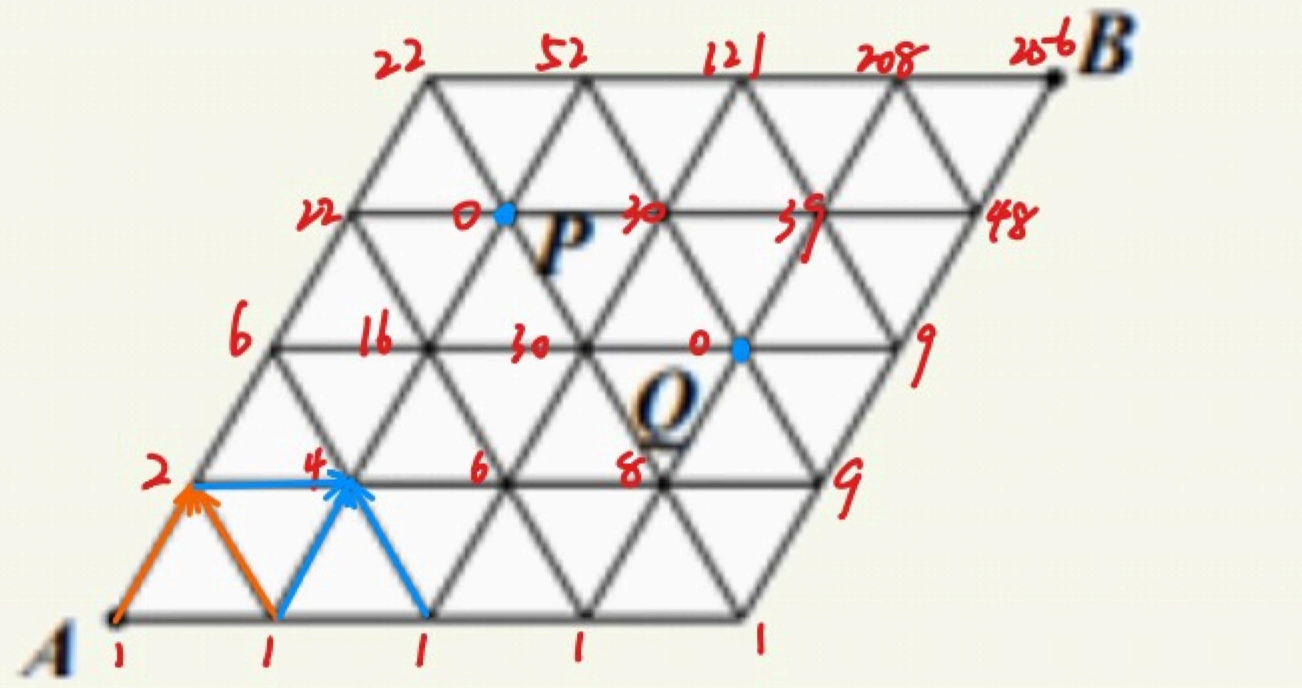
(1) 解：$A_4^2 + (A_4^2 - A_3^1)\times2 = 30$

(2) 解：$A_4^2 + A_3^2 + A_2^2 = 12+6+1 = 19$

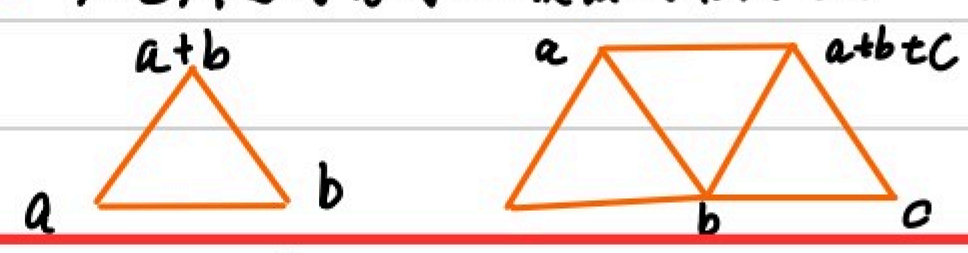
(3) 解：O E O E E E-{0} E O E O E-{0} O E O E

$A_2^2\times A_3^3+(A_3^3-A_2^2)\times A_2^2\times 2=2\times6+4\times2\times2=28$

B. 某城市街道的平面图如图所示，若每个路口仅能沿右、左上、右上三个方向走，若P、Q两处因故施工，不能通行，从A至B的路径条数有m条，则m为（　　）



解：红笔所写的为到达该点的方法数



下面练习点导数

1. 求导 $f(x)=x^3e^x-1$

解：$f'(x)=3x^2e^x+x^3e^x=x^2e^x(3+x)$

2. $f(x)=f'(\frac{\pi}{6})\sin x+\cos x$，求$f(\frac{\pi}{6})$

解：$f'(x)=f'(\frac{\pi}{6})\cos x-\sin x$

代入$x=\frac{\pi}{6}$得，$f'(\frac{\pi}{6})=f'(\frac{\pi}{6})\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac12$ ∴ $f'(\frac{\pi}{6})=\sqrt3-2$

∴ $f(\frac{\pi}{6})=(\sqrt3-2)\times\frac12+\frac{\sqrt3}{2}$

$=-1$

3. $f(x)=\ln(2x-1)$，若$f(x)$在x_0处导数$f'(x_0)=1$，求x_0

解：$f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ ∴ $\frac{2}{2x_0-1}=1$，$x_0=\frac32$

4. $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，求$f'(x)$

解：$f'(x)=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}$

$=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

5. $f(x)=\frac12x^2-2ax+\ln x$ 存在垂直于y轴的切线，求a的取值范围是

解：$x-2a+\frac1x=0$，$x^2-2ax+1=0\ (x\neq0)$

$\Delta=4a^2-4\geq0$　$a\in\cancel{(-\infty,-1]}\cup[1,+\infty)$

更正：$\ln x\Rightarrow x>0$　∵ $x-2a+\frac1x=0$

∴ $x+\frac1x=2a$，$a=\frac{x+\frac1x}{2}\in[1,+\infty)$

6. 已知$y=e^x$在点(a_k,e^{a_k})处切线与x轴交点横坐标为a_{k+1}，其中$k\in N^*$，$a_1=0$，求$a_1+a_3+a_5$

解：$k_k=e^{a_k}$，∴ $y=e^{a_k}x-a_ke^{a_k}+e^{a_k}$

∴ $a_{k+1}=\frac{a_ke^{a_k}-e^{a_k}}{e^{a_k}}=a_k-1$

∴ $a_1+a_3+a_5=0-2-4=-6$

7. 已知 $f(x)=2xf'(1)+\ln x$，求$f'(1)$

解：$f'(1)=2f'(1)+1$，$f'(1)=-1$

8. 设 $a=\frac{\ln2}{2}$，$b=\frac{\ln3}{3}$，$c=\frac1e$，则

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

解：令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，$\ln x=1$，$x=e$ ∴ e前递增，e后递减

∵ $2<e<3$ ∴ c最大 ∵ $a=\frac{\ln2}{2}$，$b=\frac{\ln3}{3}$

∴ $a-b=\frac{3\ln2}{6}-\frac{2\ln3}{6}=\frac{\ln8-\ln9}{6}<0$

∴ $a<b$　∴ $a<b<c$

9. 已知 $a=3\ln2^\pi$，$b=2\ln3^\pi$，$c=3\ln\pi^2$，下列选项正确的是：

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$

C. $c>b>a$　　D. $b>c>a$

解：$a=3\pi\ln2$，$b=2\pi\ln3$，$c=6\ln\pi$

∴ $\frac{a}{6\pi}=\frac{\ln2}{2}$，$\frac{b}{6\pi}=\frac{\ln3}{3}$，$\frac{c}{6\pi}=\frac{\ln\pi}{\pi}$

∵ $2<3<\pi$ 同上可知 $a<b$，$b>c$

∵ $a-c=\frac{\ln2}{2}-\frac{\ln\pi}{\pi}=\frac{\ln2^\pi-\ln\pi^2}{2\pi}$

令 $g(x)=\frac{\ln2^x-\ln x^2}{2x}=\ln\frac{2^x}{x^2}/2x$

$(2^x=e^{x\ln2}，(2^x)'=2^x\ln2)$

$(\ln2^x-\ln x^2)'=\frac{1}{2^x}\cdot2^x\ln2-\frac{1}{2x}\times2$

$=\ln2-\frac1x$

∴ $g'(x)=\frac{2x(\ln2-\frac1x)-2(\ln2^x-\ln x^2)}{4x^2}$

$=\frac{-2+4\ln x}{4x^2}=\frac{-1+2\ln x}{2x^2}$

∴ $\ln x^2=1$，$x^2=e$　∴ e后递增

∵ $2^x=x^2\Leftarrow x=2$，$2^2>e$，$\pi^2>2^3$

∴ $g(\pi)>0$　∴ $a<c$

∴ $b>c>a$

以上非常规做法，下方为正常作法：

$\frac{a}{6\pi}=\frac{\ln2}{2}=\frac{\ln4}{4}$ ∵ $e<3<\pi<4$ ∴ 显然 (uuum)

10. $2^a+\frac{\ln2}{2}=3^b+\frac{\ln3}{3}=5^c+\frac{\ln5}{5}$，则

A. $c\ln5>a\ln2>b\ln3$　　B. $a\ln2>c\ln5>b\ln3$

C. $b\ln3>c\ln5>a\ln2$　　D. $a\ln2>b\ln3>c\ln5$

解：$m=a\ln2$，$n=b\ln3$，$k=c\ln5$

∴ $e^m+\frac{\ln2}{2}=e^n+\frac{\ln3}{3}=e^k+\frac{\ln5}{5}$

易知 $\frac{\ln2}{2}<\frac{\ln3}{3}$，$\frac{\ln3}{3}>\frac{\ln5}{5}$

因此我们还得比较 $\frac{\ln 2}{2}$ 和 $\frac{\ln 5}{5}$ (Maлaлэnu)

$\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 5}{5}=\frac{\ln 32-\ln 25}{10}>0 \quad \therefore \frac{\ln 2}{2}>\frac{\ln 5}{5}$

$\therefore \frac{\ln 5}{5}<\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3} \quad \therefore e^k>e^m>e^n$

$\therefore k>m>n \quad \therefore$ 选 A

(结果还是绕了点路，还是 $\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，$5>4>3$)

11. 已知定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x)=f(-x)$，且当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)+xf'(x)<0$成立，若$a=(2^{0.1})\cdot f(2^{0.1})$，$b=(\ln 2)\cdot f(\ln 2)$，$c=(\log_2\frac{1}{8})\cdot f(\log_2\frac{1}{8})$，则$a$，$b$，$c$的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$

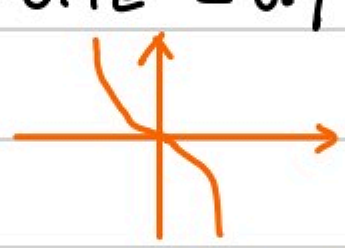
C. $c<a<b$　　D. $a>c>b$

解：$\because f(x)+xf'(x)<0 \quad \therefore$ 令 $h(x)=xf(x)$

$\therefore h'(x)<0 \quad \because f(x)=f(-x) \quad \therefore h(x)=-h(-x)$

$\because h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减 $\therefore h(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上递减

$\because 0.1e^2<0.9<2 \quad \therefore 2^{0.1}<\ln 2 \quad \therefore b>a$



$\because \log_2\frac{1}{8}=-3$，$-3<2^{0.1}$

$\therefore c>b>a$

12. (2022新高考) 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$

解：$10b=\frac{10}{9}$，$e^c=\frac{10}{9} \quad \therefore e^c=10b$

$\therefore b=0.1e^c \quad \because a=0.1e^{0.1}$

$\therefore$ 设 $f(x)=\ln\frac{x}{9}-\frac{1}{x}$

$\therefore f'(x)=\frac{9}{x}\times\frac{1}{9}-\ln x=\frac{1}{x}-\ln x=0$

$\therefore x>0$ 时，$f(x)$ 递减

$\because \ln\frac{x}{9}-\frac{1}{x}=0$，$\ln x^x-\ln 9=1$

$\therefore x^x=9e$，$x<3<10$

$\therefore f(10)<0$，即 $0.1<c$

$\therefore b>a$

$\therefore$ 设 $g(x)=xe^x+\ln 9x$

$xe^x=\ln\frac{x}{9} \quad \therefore 9e^{xe^x}=x$

$\therefore 9(e^x)^{e^x}-x=0$，微分得 $(e^x)^{e^x}(x+1)\cdot e^x-1$

$\therefore x=0 \quad \because x>0$ 时，$(e^x)^{e^x}(x+1)e^x-1>0$

$\therefore x>0$ 时，$9(e^x)^{e^x}-x$ 递增

下面只要证明零点的x值 <0.1 就好行了！这样我们就把问题转化成更难解决的问题了！(Maлeнeдauцg наинаице myи.)

我们重新构造函数试试：

设 $g(x)=xe^x+\ln(1-x)$，$\therefore$ 零点为 $x=0$

$g'(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{x-1}=0$，解得 $x=0$

$\therefore x>0$ 时递增 $\quad \therefore 0.1e^{0.1}+\ln(1-0.1)>0$

$\therefore a>c \qquad \therefore b>a>c$

以上是自己摸索的做法，下面参照别的：

Way 2：有不等式 $x+1\le e^x\le\frac{1}{1-x}\ (x<1)$ (1)

$\frac{2(x-1)}{x+1}\le\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ (x>1)$ (2)

(1) 代入 0.1 $\therefore 1.1<e^{0.1}<\frac{10}{9}$

$\therefore a=0.1e^{0.1}<\frac{1}{9}=b \qquad \therefore a<b$

(2) 代入 0.9 $\therefore \frac{-0.2}{1.9}<\ln 0.9<\frac{1}{2}(\frac{9}{10}-\frac{10}{9})$

$\therefore c<\frac{2}{19}<\frac{11}{100}<a \qquad \therefore c<a<b$

Way 3: Taylor 公式

$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+o(x^n)$，$a_i=\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$

$\therefore e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$

$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$

$\therefore 0.1e^{0.1}=0.1(1+0.1+0.5+o(x^2))$

$=0.1105+0.1o(x^2)$

$\frac{1}{9}=0.1111\cdots$

$-\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}=\ln(1+\frac{1}{9})=\frac{1}{9}-\frac{1}{162}+\frac{1}{3^7}+o(x^3)$

≈ 0.105

$\therefore c<a<b$

补充：Taylor 求极限的习题

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^3/3!+o(x^3)-x+x^3/2!-xo(x^2)}{x^3(1+o(1))}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3/3}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-1-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}1=1$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+1+o(1))(x+o(x))}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x}{2x}+\frac{x}{2}\cos\frac{1}{x}$

$=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$

例 206. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $\triangle ABC$ 是正三角形, 四边形 ACC_1A_1 是菱形, 且 $\angle A_1AC=60^\circ$, M 是 A_1C_1 的中点, $MB=BC$ ⇒ $MB=MC$

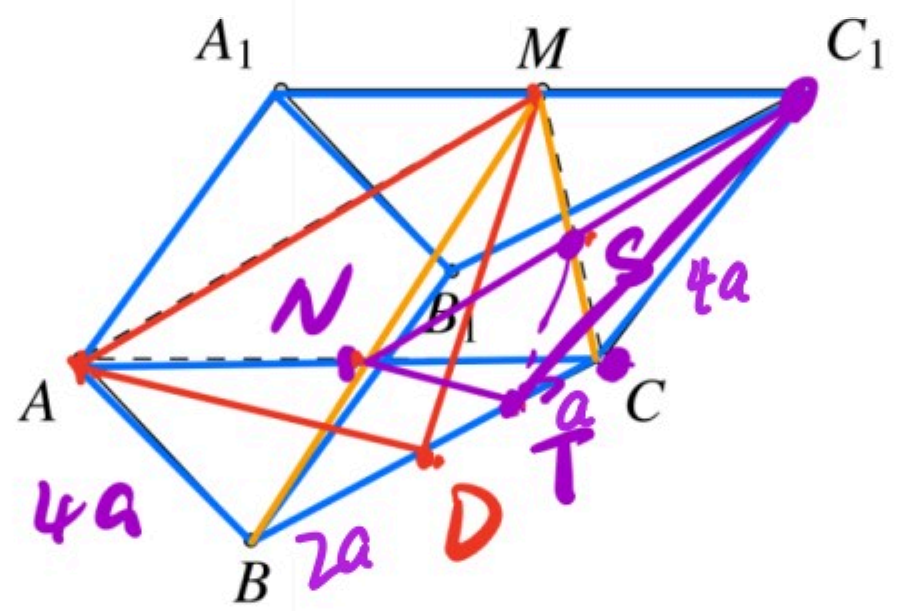
D中点.

1. $MD\perp BC$

$AD\perp BC$

$\Rightarrow BC\perp$ 平面 MAD

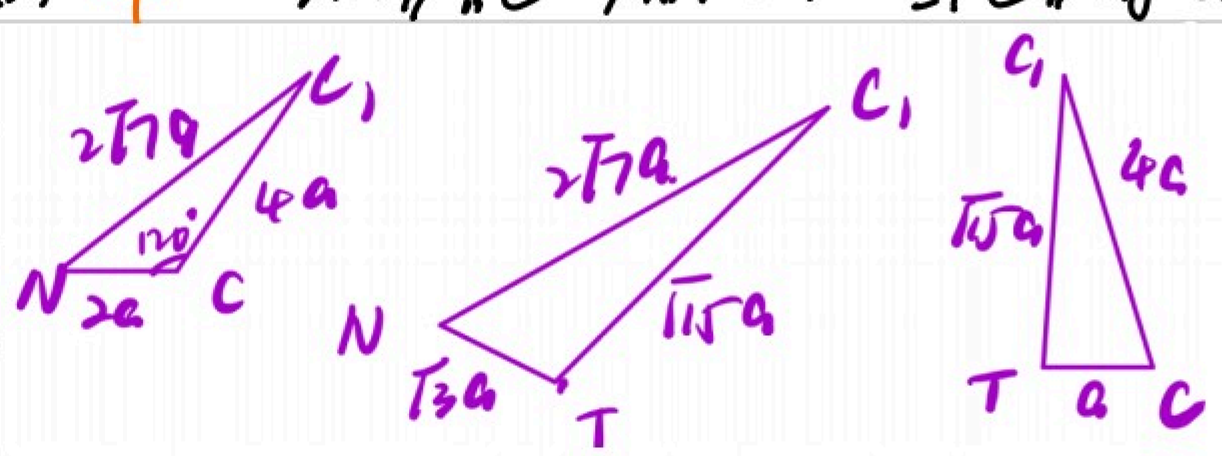
$\Rightarrow BC\perp AM$



1. 证明: $AM\perp BC$.
2. 求直线 AM 与平面 BCC_1B_1 所成夹角的正弦值.

(1) 证明: 取 AC 中点 N 连 NC_1 ∴ $NC_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AM$ 连接 CD 中点 T 和 C_1, 连 NT、C_1T ∵ $\triangle ABC$ 为正三角形 ∴ $AD\perp BC$ ∴ $NT\perp BC$ 连 NC_1、MC 交于 S ∴ S 为 ▱C_1MNC 中心 ∴ S 为 NC_1 中点 又∵ T 为 CD 中点 ∴ $ST\parallel MD$ 又∵ $SN\parallel AM$, $NT\parallel AD$ ∴ 面 $MAD\parallel$ 面 SNT ∵ $MB=BC=CC'=MC$ ∴ $\triangle MBC$ 等边 ∴ $MD\perp BC$ 又∵ $AD\perp BC$ ∴ $BC\perp$ 面 MAD ∴ $BC\perp AM$

(2) 解: ∵ $AM\parallel NC$, $NT\perp BC$ ∴ CD 为 C_1N 的投影 ∴ $\angle NC_1T=$ (AM 与面 BCC_1B_1 夹角)



$$\therefore \cos\angle NC_1T=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{28a^2+15a^2-3a^2}{4\sqrt{105}\,a^2}=\frac{10}{\sqrt{105}}$$

$$\therefore \sin\angle NC_1T=\sqrt{1-\frac{100}{105}}=\frac{\sqrt{21}}{21}$$

例 207 (2021. 全国乙卷.18). 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC=1$. M 为 BC 的中点, 且 $PB\perp AM$.

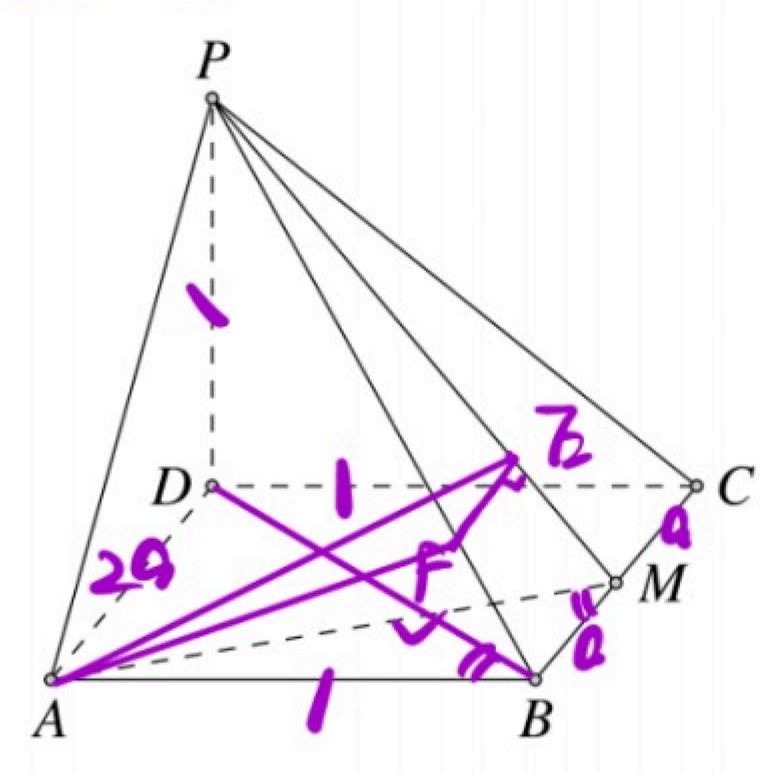
1. $PD\perp AM$, $PB\perp AM$

$\Rightarrow AM\perp BD$

$$\frac{2a}{1}=\frac{1}{a}$$

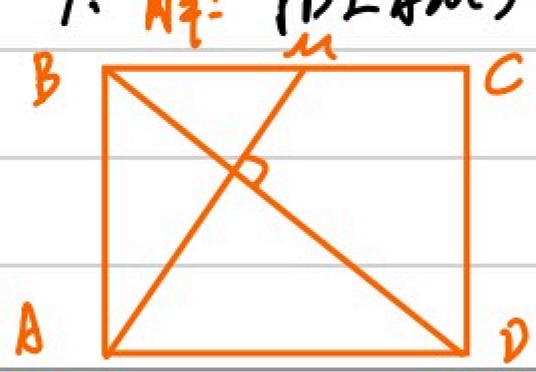
$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$BC=2a=\sqrt{2}$



1. 求 BC.
2. 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.

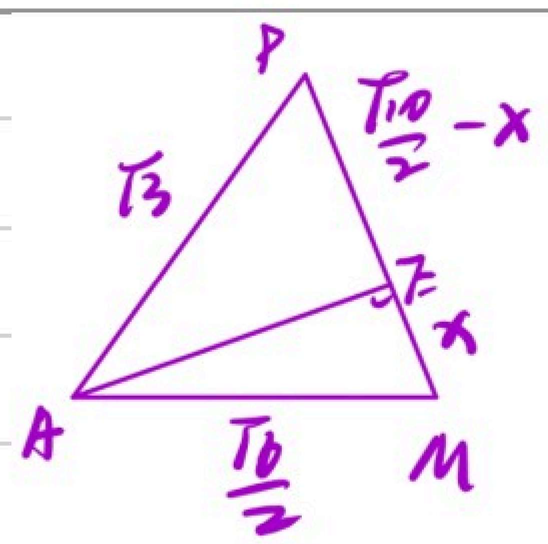
1. 解: $PD\perp AM$, $PB\perp AM$ ∴ $AM\perp BD$ (三垂线定理) ∵ $AM\perp BD$ ∴ $\triangle ABM\backsim\triangle DAB$ ∴ $\frac{2a}{1}=\frac{1}{a}$



∴ $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC=2a=\sqrt{2}$

2. 解: 作 $AE\perp PM$, $EF\perp PM$ ∴ $A-PM-B=\angle AEF$

∵ $AD=\sqrt{2}$ ∴ $AP=\sqrt{3}$ $DM=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ∴ $PM=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $AM=\frac{\sqrt{6}}{2}$



设 $ME = x$ $\therefore 3-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}-x\right)^2 = \frac{3}{2}-x^2$, $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore AE = \sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$, $ME = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $PE = \frac{2}{5}\sqrt{10}$

$\therefore \cos\angle BPM = \frac{PB^2+PM^2-BM^2}{2PB\cdot PM} = \frac{3}{10}\sqrt{10} \Rightarrow PF = \frac{4}{3}$, $EF = \frac{2}{15}\sqrt{10}$

$\cos\angle APB = \frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

在$\triangle APF$中, $AF = \sqrt{PA^2+PF^2-2PA\,PF\cos\angle APB} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\therefore \cos\angle APB = \frac{3}{14}\sqrt{14}$ $\therefore \sin\angle APB = \frac{\sqrt{70}}{14}$