INFORMAL NOTES ON MATHEMATICS

2022.07.25

突然发现竟然空着一个7-25笔记，现在来补了。

【例 1】求排列 426315 的逆序数

【解析】$\tau(426315)=0+1+0+2+4+1=8$

求逆序数：一切向前看。 2前4比2大，3前4.6比3大，1前有2，4，3，6比1大，5前有6比5大

【例 2】在六阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 中，此项"$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$"的符号为________号.

【解析】$\tau(a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34})=\tau(a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65})=0+1+1+2+2+1=7$，故应取负号。

如果按行排列，符号取决于列排列的逆序数 $\tau(614235)=0+1+1+2+2+1=7 \therefore (-1)^7=-1$，取负号

2. 行列式性质及计算

(1)行列式性质

1)转置不变

$$例：\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$$

因此以下性质对行、列都成立

2)对换变号

$$例：\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{vmatrix}$$

3)提公因子

$$例：\begin{vmatrix}3&1&4\\2&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&1&4\\1&1&1\\1&2&3\end{vmatrix}$$

4)拆加性质

$$例：\begin{vmatrix}a_1&b_1+d_1&c_1\\a_2&b_2+d_2&c_2\\a_3&b_3+d_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$$

5)倍加不变

$$例：\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+ka_{11}&a_{22}+ka_{12}&a_{23}+ka_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

零值性质：①某行为零，行列式为零；②两行成比例，行列式为零

例：$\begin{vmatrix}3&1&4\\2&4&6\\1&2&3\end{vmatrix}=0$，例：$\begin{vmatrix}3&1&4\\0&0&0\\1&2&3\end{vmatrix}=0$

(2) 行列式计算

1）对角线法则

【例 3】计算 $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$

【解析】$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$

$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$

红线：主对角线
橙线：副对角线

【例 4】计算 $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

主对角线之积的和减去副对角线之积的和

（对角线法）

（只适用于二阶和三阶行列式）

【解析】$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-1\times6\times8-2\times4\times9-3\times5\times7$

$=45+84+96-48-72-105=0$

2）三角化法

三角行列式公式：

①主对角三角行列式：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

②副对角三角行列式：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdots a_{n1}$$

逆序数

【例 5】计算 $D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}$

【解析】$D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2-2r_1}}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2-2\times1&1-(-1)\times2&0-1\times2\\2&1&-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\2&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\0&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\times3\times(-1)=-3$$

（法2）

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\3&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{3\times2}{2}}\times3=-3$$

【例 6】计算 $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$

【解析】 $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xlongequal[-c_4+c_3]{-c_2+c_1}2\begin{vmatrix}x&1&0&1\\x&1-x&0&1\\0&1&y&1\\0&1&y&1-y\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[-r_3+r_4]{-r_1+r_2}2\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&-x&0&0\\0&1&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&-1&0&0\\0&1&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}x\begin{vmatrix}x&1&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&y&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

【例 7】计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}$

解：

$$D4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\2&-2&0&-4\\4&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\4&0&0&-4\\4&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\4&0&0&-4\\8&0&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&2&3&0\\2&2&0&0\\8&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=4\times3\times2\times8\times(-1)^{\frac{4\times3}{2}}\times(-1)=-192$$

【例 8】 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

【解析】将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

再将各列都加到第一列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

练习题 1

1. 求下列排列的逆序数：(1) 7654321 (2) 36715284

(1) $1+2+3+4+5+6=\frac{6\times7}{2}=21$

(2) $0+0+3+2+4+0+4=13$

2. 在六阶行列式中，项 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 的符号应取__+__号。

解：$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}=a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$

$\tau(452316)=0+2+2+4=8$ $\therefore(-1)^8=1$

3. 三阶方阵 A 按列分块为 $A=(a_1,a_2,a_3)$，且 $|A|=5$，又设 $|B|(a_1+2a_2,3a_1+4a_3,a_2)$，则 $|B|=$

解：$|B|=-|A|=-5$ (行列式性质)

4. 计算下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

解：原式 $=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解: $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&3\\3&1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5&3\\3&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&5&3\\0&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\times3=-6$

(3) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$

解: 原式 $=\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&1&-3&1\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&1&-3&1\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&-4&4\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=160$

(4) $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解: 原式 $=\begin{vmatrix}2&0&1&1\\-2&2&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&2\end{vmatrix}=2\times2\times2=8$

(5) $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$

解: 原式 $=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\0&8&4&-2\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\0&8&4&-2\\0&-2&5&-5\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\1&-5&3&-3\\0&8&4&-2\\0&-2&5&-5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\1&0&3&-5\\0&2&4&8\\0&0&5&-2\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\0&-1&10&-16\\0&2&4&8\\0&0&5&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\0&-1&10&-16\\0&0&24&-24\\0&0&5&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\0&-1&10&-16\\0&0&5&-2\\0&0&24&-24\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\0&-1&10&-16\\0&0&5&-2\\0&0&0&-24\end{vmatrix}$

$=3\times(-1)\times5\times(-24)=360$

不知道哪步开始出错了。拿WolframAlpha验算一下发现是40.

原式 $=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\3&1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{25}{12} \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & 19 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{25}{12} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{25}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 1 \times (-24) \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$= 40$$

我好像知道错哪了，直接把某行扩大或缩小n倍不是初等行变换，是不允许的。