Informal Notes on Mathematics

2022.08.01

今天又开始学高中内容了。一节课3小时，好长啊。

子集的个数（有限集）：若 A 的元素个数为 n，A 的子集个数为：

一个元素要么属于子集，要么不属于子集，因此为 $\overbrace{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2}^{n}=2^n$

实际上如果定义特征函数 $y(x)=\begin{cases}0 & (x\notin S)\\ 1 & (x\in S)\end{cases}$，$S$ 是 A 的子集，则 y 可视为 $A\to\{0,1\}$ 的一个映射。我们把 $\{0,1\}$ 记作 2，所有这样的 y 的集合记作 2^A，我们很容易有 $|2^A|=2^{|A|}$，子集的数量是显然的。

实际上我们会经常看到这样的记号，比如 $\mathbb{R}^{[0,1]}$，实际上 A^B 一般表示的就是所有 $B\to A$ 映射的集合，即所谓幂集

（这段是我自己随想的，虽然很 naive 但是高中都不讲）

De Morgan 律：$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$，$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$

容斥原理：之前讲过。$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

例 2. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 由大于 -3 且小于 11 的偶数组成的集合可表示为________

(2) 不等式 $3x-6\leqslant 0$ 的解集可表示为________

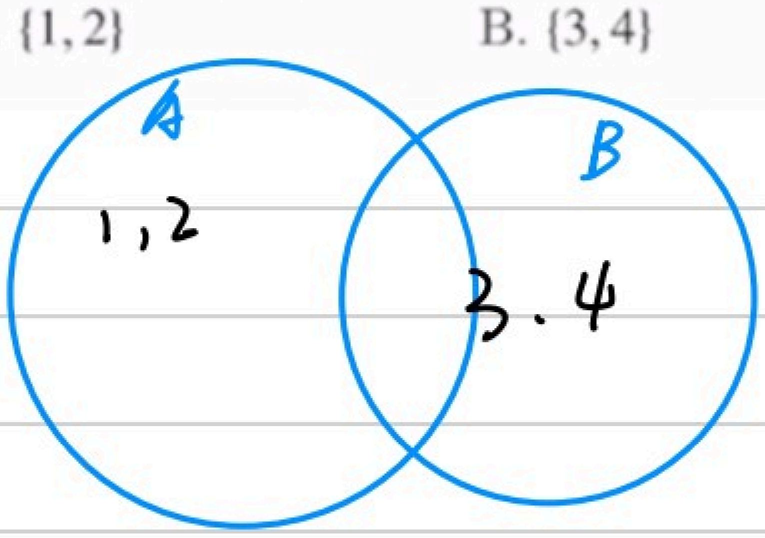
(3) 函数 $y=x^2-x-1$ 图像上的点组成的集合可表示为________

(1) $\{2n\mid -1\leq n\leq 5\}$ (2) $\{x\mid x\leq 2\}$ (3) $\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$

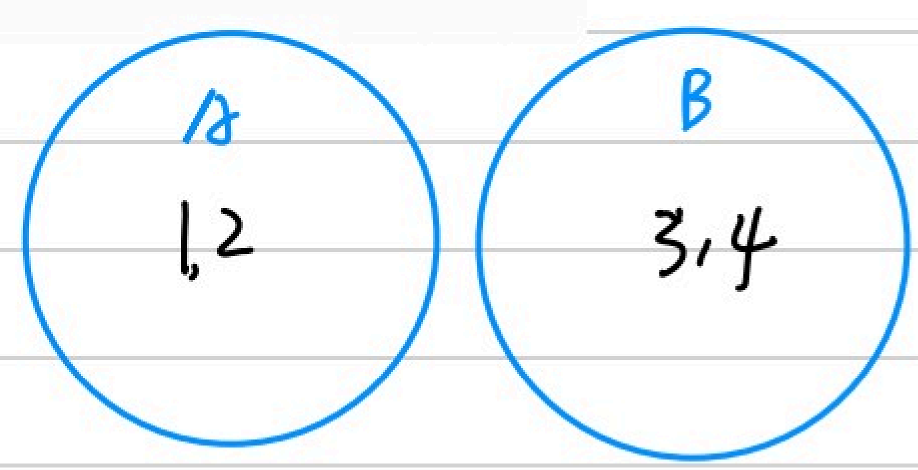
例 3. 已知全集 $U=A\cup B=\{1,2,3,4\}$, $A\cap C_UB=\{1,2\}$, 则集合 $B=$ (B)

A. $\{1,2\}$ B. $\{3,4\}$ C. $\{1,3\}$ D. $\{2,4\}$

解：



实际上也有可能是：



例 4. 已知集合 $A=\{x\mid 1<x<7\}$, $B=\{x\mid x^2-4x-5\leqslant 0\}$, $A\cap(C_RB)=$ (A)

A. $(5,7)$ B. $(1,5)$

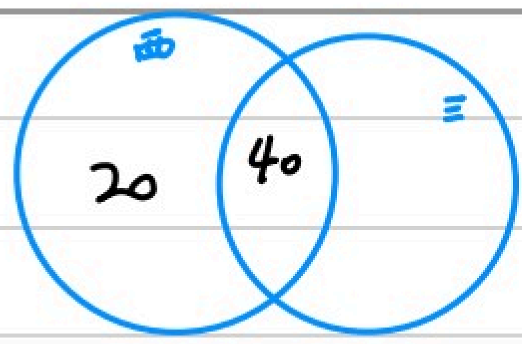
C. $(-1,1)$ D. $(-1,1)\cup(5,7)$

解：$B=\{x\mid -1\leq x\leq 5\}$ ∴ $C_RB=\{x\mid x<-1 \wedge x>5\}$ ∴ $A\cap(C_RB)=$

例 5. 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝, 并称为中国古典小说四大名著, 某中学为了了解在校学生阅读四大名著的情况, 随机调查了 100 位学生, 其中阅读过《西游记》或《三国演义》的学生共有 80 位, 阅读过《西游记》的学生共有 60 位, 阅读过《西游记》且阅读过《三国演义》的学生共有 40 位, 则在调查的 100 位同学中阅读过《三国演义》的学生人数为 (　　)

A. 60 B. 50 C. 40 D. 20

解：



$60+x-40=80$，$x=60$

我就知道也不敢出画四个集合的Venn图，因为很难画出来。所以Venn图并不是什么很强的工具（$\geqslant 5$就在平面内画不出来了）

例 6. 若集合 $\{a,b,c,d\}$ 和 $\{1,2,3,4\}$ 是相同的，且下列四个关系：①$a=1$；②$b\neq 1$；③$c=2$；④$d\neq 4$ 有且只有一个是正确的，则符合条件的有序数组 (a,b,c,d) 的个数是________.

解：若①为真，则②为真，舍。若②为真，∴ $a\neq 1$，$c\neq 2$，$d=4$ ∴ $\{a,c\}=\{2,3\}$ ∴ 有2种
若③为真，则 $a\neq 1$，$b=1$，$c=2$，$d=4$ ∴ $a=3$ ∴ 有一种，若④为真，则 $a\neq 1$，$b=1$，$c\neq 2$，$d\neq 4$ ∴ $a\in\{2,3,4\}$
$c\in\{3,4\}$，$d\in\{2,3\}$ ∴ 有3种 ∴ 是 $1+2+3=6$

例 7. 已知 $A=\left\{a \mid a=x^2-y^2, x,y\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{a \mid a=x^2-y^2, x,y\in Q\right\}$ 求证：

（1）$2k-1\in A,(k\in\mathbf{Z})$；

（2）$4k-2\notin A,(k\in\mathbf{Z})$；

（3）若 $p\in A, q\in A$，则 $pq\in A$；

（4）若 $p\in A, q\in A, q\neq 0$，则 $\dfrac{p}{q}\in B$.

解：(1) $2k-1=k+k-1=(k+k-1)(k-(k-1))\in A$

(2) $4k-2=2(2k-1)=(x+y)(x-y)$ 同奇/同偶 ⇒ 舍

(3) $p=a^2-b^2$，$q=c^2-d^2$ $pq=(c+d)(c-d)(a+b)(a-b)=(ac+ad+bc+bd)(ac-ad+bd-bc)$

∴ $pq\in A$

(4) $p=a^2-b^2$，$q=c^2-d^2$ ∵ $\frac{p}{q}=\frac{pq}{q^2}$ ∴ 由(3)知显然。

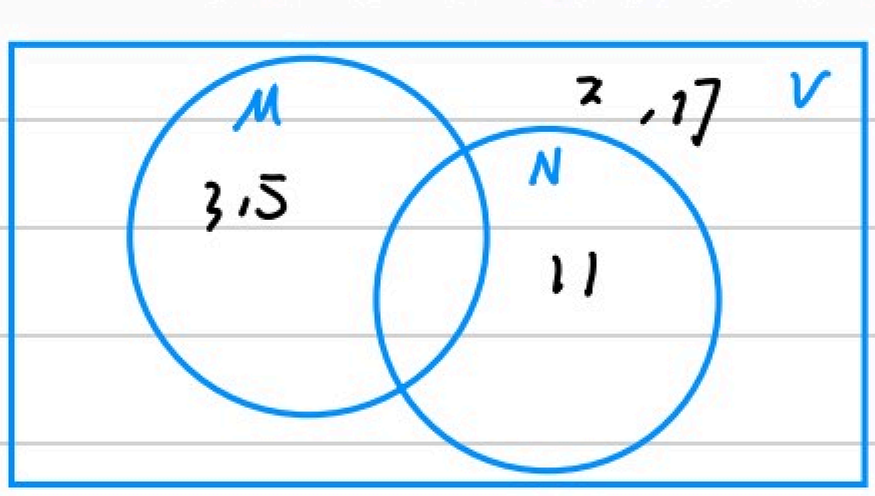
例 9. 集合 $\{y \mid y=[x]+[2x]+[3x], x\in R, 1\leqslant y\leqslant 100\}$ 共有________个元素，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解：$k\in\mathbb{Z}$，

k	$k+\frac{1}{3}$	$k+\frac{1}{2}$	$k+\frac{2}{3}$	$k+1$
$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6(k+1)$

∴ $101-1-(16+1)-(15+1)=67$

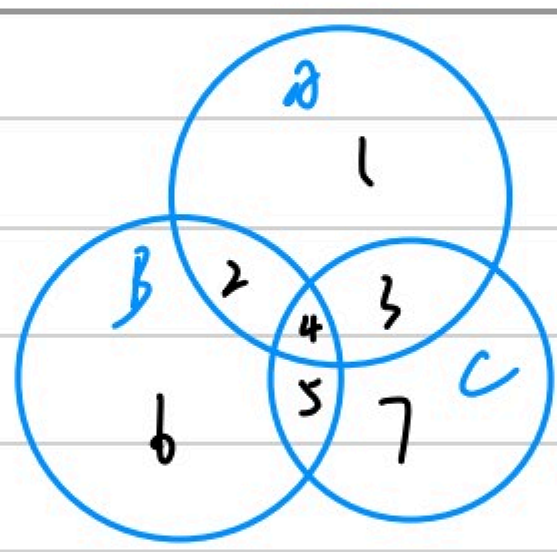
例 13. 已知全集 $U=\{$不大于 20 的质数$\}$，M,N 是 U 的两个子集，且 $M\cap(C_UN)=\{3,5\}$，$N\cap(C_UM)=\{11\}$，$(C_UN)\cap(C_UM)=\{2,17\}$，则 $M=$________.



$U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
∴ $M=\{3,5,7,13,19\}$

例 14. 已知集合 A,B,C（不必相异）的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,\ldots,10\}$，则满足条件的集合的有序三元组 (A,B,C) 的个数为________.

解：似乎是《奥数教程》上的题。



某元素 a 一定属于 1~7 块中的一块

$\therefore \underbrace{7\times7\times7\times\cdots\times7}_{10}$

$=7^{10}$

例 15. 已知整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$，且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$A\cup B$ 的所有元素之和为 124. 求 A.

解：$a_4^2\notin A\cap B$（显然）$\therefore a_1=a_1^2 \Rightarrow a_1=0$ 或 1 $\quad a_4^2>a_4=a_2^2$ 或 a_3^2

$\therefore A\cup B=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_4^2,b\}$，$b\in\{a_2^2,a_3^2\}=a_4$

$\therefore \begin{cases} a_4^2+a_4<124 \\ a_4\geqslant 3 \\ 6a_4^2>124 \end{cases} \Rightarrow a_4=9$

$\therefore a_1+a_2+a_3+b=34$，$a_2=3$ 或 $a_3=3$

若 $a_3=3$，则 $a_1+a_2+a_3+a_2^2\leqslant 1+2+3+4<34$

$\therefore a_2=3 \quad \therefore a_1+a_3+a_3^2=31 \quad \therefore a_1=1,\ a_3=5$

$\therefore A=\{1,3,5,9\}$

例 18. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，映射 $f:A\mapsto A$，且 f 既是单射又是满射. 若 $f(x)+f(f(x))=6$ 恒成立，则 $f(1)$ 的值为________.

解：$f(f(x))=6-f(x) \quad \therefore f(x)=6-x \quad \therefore f(1)=5$

例 19. 如果集合 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，C 是 A 的子集，且 $C\cap B\neq\varnothing$，则这样的子集 C 有（　　）个

A. 256　　B. 959　　C. 960　　D. 961

解：A 的子集 2^{10} 个 $\begin{cases} 与 B 交非空 & 2^{10}-2^6=1024-64=960 \\ 与 B 无交 & 2^{10-4}=2^6 \end{cases}$

例 21. 给定 $k\in\mathbb{N}^*$，D 是正整数集的子集，设函数 $f:D\to\mathbb{N}^*$ 满足：对于任意大于 k 的正整数 n，$f(n)=n-k$.

(1) 设 $k=1$，则其中一个函数 f 在 $n=2$ 处的函数值为__1__；

(2) 设 $k=4$，$D=\{1,2,3,4\}$，$2\leqslant f(n)\leqslant 3$，则不同的函数 f 的个数为__16__.

解：(2) $\because$ D中所有元素 $\leqslant 4$ $\therefore$ 不用管条件限定 $\therefore f(n)\in\{2,3\}$ $\quad\therefore 2^4=16$

例 27. f 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身的一个映射，非空子集 A 满足 $f(A)=\{b\mid\exists a\in A, f(a)=b\}$，若满足 $f(A)=A$，称其为不动子集. 求证：有奇数个不动子集.

解：我感觉挺显然的，还能怎证。

（为什么我觉得显然：所有这样的 f 其实恰好构成对称群 S_n。按 S_n 内元素的表示法，令 $(a\ b\ c)$ 表示 $a\to b$，$b\to c$，$c\to a$，每个 f 都可以写成有限个这样的有限长循环的形式，比如 $(2\ 3\ 4)$ 或 $(1\ 2)(3\ 4)$，则除去"( )"内的元素，其余元素的所有非空子集都满足条件，个数为奇数个；把每个"( )"内的小节视为一个整体，这几个小节组成的集合的所有非空子集中数构成的集合亦满足条件，个数为奇数个。再加上一开始的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$，总个数为奇数。当然，特殊的情况就是，整个集合就是整个循环节，如 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\cdots n)$，此时满足条件的集合只有本身，总个数为1，也是奇数。这种情况是 trivial 的。）

好吧，解答和我的想法本质上是一样的。

例 29. 是否存在单射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(x^2\right)-f^2(x)\geqslant\dfrac{1}{4}$？

解：若存在，则有 $f(0)-f^2(0)\geqslant\frac{1}{4}$，$f(1)-f^2(1)\geqslant\frac{1}{4}$

$\therefore f^2(0)-f(0)+\frac{1}{4}\leqslant 0$，$f^2(1)-f(1)+\frac{1}{4}\leqslant 0$ $\therefore \left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$，$\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$

$\therefore f(1)=f(0)=\frac{1}{2}$，不满足单射定义，矛盾

例 30. 求函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$，使得对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}_+$，均有 $f\left(\dfrac{f(y)}{f(x)}+1\right)=f\left(x+\dfrac{y}{x}+1\right)-f(x)$.

解：先证明 $f(x)$ 为单射 $\forall a,b\in\mathbb{R}_+$，$a-b>1$，令 $x=a$，$y=a(b-a-1)$

$\therefore f\left(\frac{f(b-a-1)}{f(a)}+1\right)=f(b)-f(a)>0$

若 $f(s)=f(t)$，则由上知 $|s-t|\leqslant 1$ $\therefore$ 对于 $\forall y\in\mathbb{R}_+$，有 $f\left(s+\frac{y}{s}+1\right)=f\left(t+\frac{y}{t}+1\right)$

$\because$ 当 y 足够大时，$\left|\left(s+\frac{y}{s}+1\right)-\left(t+\frac{y}{t}+1\right)\right|>1$，矛盾 $\therefore f$ 是单射

令 $x=2$，有 $f\left(\frac{f(y)}{f(2)}+1\right)=f\left(\frac{y}{2}+3\right)-f(2)$，若 $x=y$，有 $f(x+2)-f(x)=f(2)>0$

$\therefore f\left(\frac{y}{2}+3\right)-f\left(\frac{y}{2}+1\right)=f(2)$ $\therefore f\left(\frac{f(y)}{f(2)}+1\right)=f\left(\frac{y}{2}+1\right)$

由单射知，$\frac{f(y)}{f(2)}+1=\frac{y}{2}+1$ $\therefore f(y)=\frac{f(2)}{2}y$ $\therefore f(x)=kx$，$(k>0)$

例 31. 下列各组函数中，表示相等的函数是（ ）

A. $y=x-1$ 和 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ ✗　　B. $y=x^0$ 和 $y=1$ ✗

C. $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=(x+1)^2$ ✗　　D. $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $g(x)=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}$ ✓

例 33. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x>10\\ f[f(x+5)], & x\leqslant 10\end{cases}$，则 $f(5)$ 的值是（A）

A. 24　　B. 21　　C. 18　　D. 16

解：$f(5)=f(f(10))=f(f(f(15)))=f(f(18))=f(21)=24$

例 34. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数，若 $f(x)>f(2-x)$，则 x 的取值范围是________.

解：$x<2-x$，$x<1$

例 35. 判断函数 $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 的奇偶性.

解：$\frac{x+1}{x-1}\geq 0$ 且 $x\neq 1$ ∴ $x>1$ 或 $x\leq -1$ ∴不对称 ∴非奇非偶

例 36. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，若 $g(x)=f(x)+2$，且 $g(1)=1$，则 $g(-1)=$ ___C___.

A. -1　B. 1　C. 3　D. 都不对

解：∵ $f(x)$ 为奇 ∴ $f(x)=-f(-x)$ 又∵ $f(x)=g(x)-2$

∴ $g(-x)-2=f(-x)=-f(x)=-(g(x)-2)$ ∴ $g(-1)=-(-1)+2=3$

例 39. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & \text{若} x \text{ 为有理数} \frac{q}{p}, p \text{ 与} q \text{ 互素}\\ 0, & \text{若} x \text{ 为无理数}\end{cases}$，则满足 $x\in(0,1)$ 且 $f(x)>\frac{1}{7}$ 的 x 的个数为

A. 12

B. 13

C. 14

D. 以上答案都不对

6 = 5, 1
5 = 4, 3, 2, 1
4 = 3, 1
3 = 2, 1
2 = 1

共11个，选D

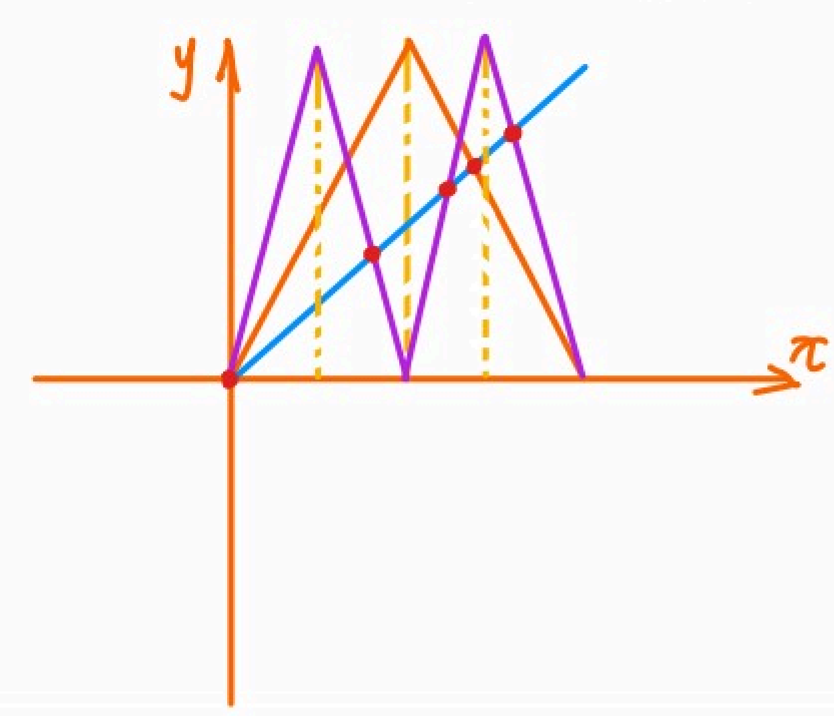
例 40. 对函数 $f:[0,1]\to[0,1]$，定义 $f_1(x)=f(x),\dots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$n=1,2,3,\cdots$. 满足 $f_n(x)=x$ 的点 $x\in[0,1]$ 称为 f 的一个 $n-$ 周期点，现设 $f(x)=\begin{cases}2x, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2-2x, \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$ 则 f 的 $n-$ 周期点的个数是 C

A. $2n$

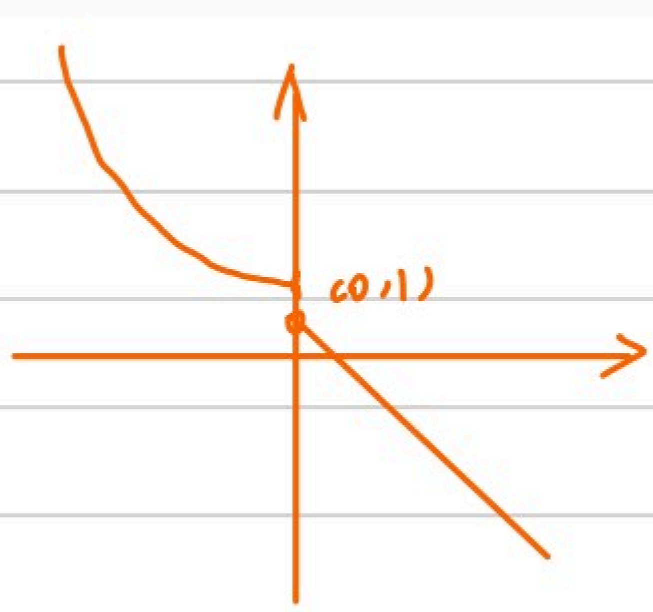
B. $2n^2$

C. 2^n

D. $2(2n-1)$



例 41. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x, x\leqslant 0\\ (2a-1)x+(1-a), x>0\end{cases}$. 在 R 上是减函数，则 a 的取值范围是________.



$\begin{cases}2a-1<0\\ 1-a<1\end{cases} \Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$

例 42. 设函数 $f(x)=x^3+x$，当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f(mt)+f(1-m)>0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

解：$\because f$ 为奇 $\therefore f(mt)>f(m-1)$ $\because f$ 递增 $\therefore mt>m-1$，$m(1-t)<1$

$\because 0\le t\le 1$ $\therefore m<\frac{1}{1-t}$ $\therefore m<1$

例 43. 已知正实数 x,y 满足 $\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+4}-2\right)\geq y$，则 $x+y$ 的最小值为 2.

解：两边同乘 $(\sqrt{y^2+4}+2)$ 得 $y^2(2x+\sqrt{4x^2+1})\geq y(\sqrt{y^2+4}+2)$

$\therefore 2x+\sqrt{4x^2+1}\geq\frac{2}{y}+\sqrt{1+\frac{4}{y^2}}$ 令 $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+1}$ ↗ $\therefore x\geq\frac{1}{y}$

$\therefore xy\geq 1$ $\therefore x+y\geq 2\sqrt{xy}=2$

例 49. 已知 $2^a=5^b=M$，且 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 M 的值是 (B)

A. 20　B. $2\sqrt{5}$　C. $\pm 2\sqrt{5}$　D. 400

解：$\log_2 M=a$，$\log_5 M=b$　$\frac{2}{a}=\frac{2}{\log_2 M}$　由于 $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$

$\therefore \log_2 M\log_M 2=\log_2 2=1$　$\therefore\frac{2}{a}=2\log_M 2=\log_M 4$　$\therefore\frac{1}{b}=\log_M 5$

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\log_M 20=2$　$\therefore M=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

例 51. 已知函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$，若函数 $y=g(x)$ 的图像与函数 $y=f^{-1}(x)+1$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(3)$ 的值为 (B)

A. 2　B. 3　C. 4　D. 7

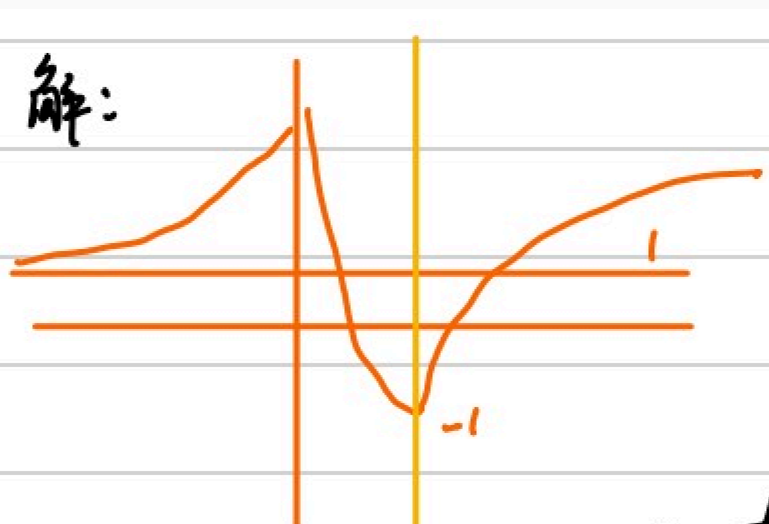
解：若 $(3,a)$ 在 g 上，则 $(a,3)$ 在 $f^{-1}(x)+1$ 上　$\therefore f^{-1}(a)=2$

$\therefore a=f(2)=3$

例 52. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x\leqslant 0\\ |\log_2 x|-1, & x>0\end{cases}$，则方程 $[f(x)]^2-2f(x)+a^2-1=0$ 的根的个数可能为 (ACD)

A. 2　B. 6　C. 5　D. 4

解：



$f(x)=1\pm\sqrt{2-a^2}$

若 $a^2=2$，有两个 x 对应

若 $a^2\neq 2$，$1-\sqrt{2-a^2}$ 有2个 x 对应

$1+\sqrt{2-a^2}$ 有2或3个 x 对应

$\therefore$ 有2、4、5个。

例 53. 已知 $a,b,c\in R^+$，且 $3^a=4^b=6^c$，试比较 $3a,4b,6c$ 的大小关系.

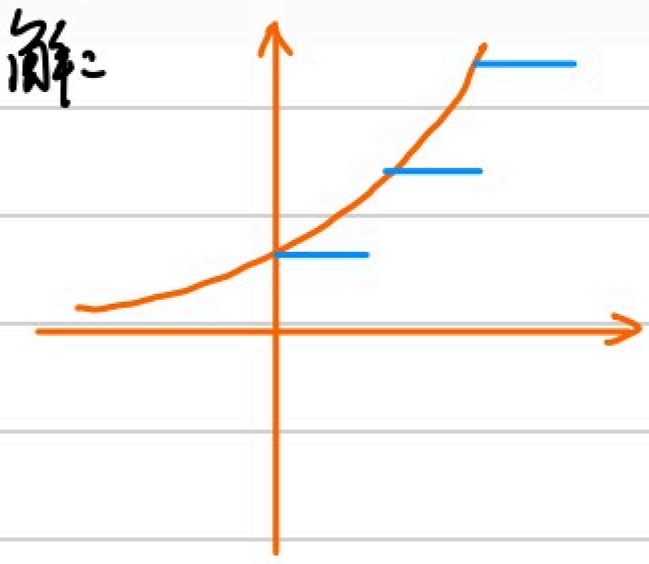
解：设 $3^a=4^b=6^c=M$　$\therefore \log_3 M=a$，$\log_4 M=b$，$\log_6 M=c$

$\therefore 3a=\log_{\sqrt[3]{3}}M$，$4b=\log_{\sqrt[4]{4}}M$，$6c=\log_{\sqrt[6]{6}}M$

$\because 3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}>6^{\frac{1}{6}}$　$\therefore 3a<4b<6c$

例 54. 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，则方程 $2^x-2[x]-1=0$ 的根的个数为 3 .

解：



$f(x)=2^x$，$g(x)=2[x]+1$

$f(0)=1$ $g(0)=1$

$f(1)=2$ ① $g(1)=3$

$f(2)=4$ ② $g(2)=5$

$f(3)=8$ ③ $g(3)=7$

$f(4)=16$ $g(4)=9$

例 55. 若 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0,a\neq1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是________.

解：$f(x)=(a^x)^2+3a^x-2$ ∵ $x\in[-1,1]$ ∴ a^x 在 a 与 $\frac{1}{a}$ 之间

在 $[-1,1]$ 中，x^2+3x-2 单调增 ∴ $f(x)$ 最值在 a^2+3a-2 和 $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}-2$ 中

∵ $max=8$ ∴ $a=2$ 或 $a=\frac{1}{2}$ ∴ min 为 $-\frac{1}{4}$

例 56. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,2]$

解：$x+1>0$，$4-x^2\geq0$，$\ln(x+1)\neq0$

∴ $x>-1$，$-2\leq x\leq2$，$x\neq0$ ∴ $x\in(-1,0)\cup(0,2]$

例 57. 比较大小

（1）$\ln\frac{1}{2}$ > $\ln\frac{1}{3}$；

（2）$\log_{\frac{1}{\pi}}2$ > $\log_{\frac{1}{\pi}}3$；

（3）$\log_{\pi}\frac{1}{2}$ > $\log_3\frac{1}{2}$；

（4）$\log_{0.5}3$ > $\log_{0.6}3$.

$\frac{1}{\pi}<1$ ∴ 递减

$\pi^{\log_\pi\frac{1}{2}}=3^{\log_3\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

∵ $\pi>3$ ∴ $|\log_\pi\frac{1}{2}|>|\log_3\frac{1}{2}|$

$\log_\pi\frac{1}{2}<\log_3\frac{1}{2}$

例 58. 不等式 $\sqrt{\log_2x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解集 $[2,4)$.

解：$\log_2x\geq1$，$x^3>0$ 设 $\sqrt{\log_2x-1}=a$ ∵ $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3=\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}x=-\frac{3}{2}\log_2x$

∴ $a-\frac{3}{2}(a^2+1)+2>0$ ∴ $0\leq a<1$ ∴ $1\leq\log_2x<2$ ∴ $2\leq x<4$

例 59. 求函数 $y=2x+\sqrt{4x^2-8x+3}$ 的最小值.

$t+\sqrt{t^2+1}\geq0+\sqrt{0+1}=1$

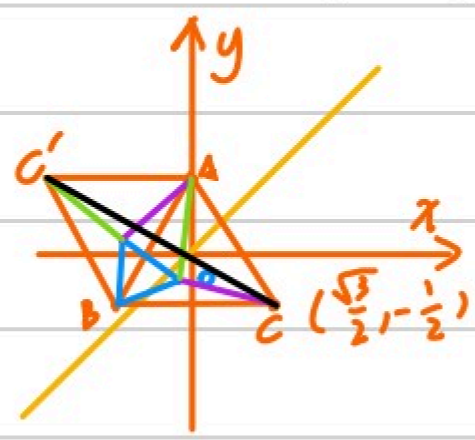
解：$4x^2-8x-3\geq0$ ∴ $x\geq\frac{3}{2}$ 或 $x\leq\frac{1}{2}$ 令 $t=\sqrt{4x^2-8x+3}$

当 $x\geq\frac{3}{2}$，$y=t+\sqrt{t^2+1}+2\geq3$，当 $x\leq\frac{1}{2}$，$y=t-\sqrt{t^2+1}+2=-\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}+2\geq1$

例 60. 求函数 $y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+\sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1}$ 的最小值.

解： $y=\sqrt{x^2-2x+1+x^2}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}}+\sqrt{x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}}$

$=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}$



$=|PA|+|PB|+|PC|$ （P在$y=x$上）

由费马点知，当$\angle AOC=\angle BOC=\angle AOB=120°$时，$|OA|+|OB|+|OC|=|CC'|$

∵$\triangle ABC$为等边三角形 ∴原点即是最短的点

∵$y=x$过原点 ∴最小值为3 （这题就是巧了）