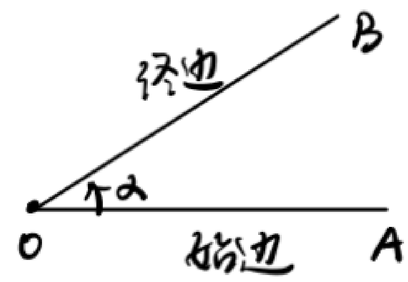
三角函数

1. 角

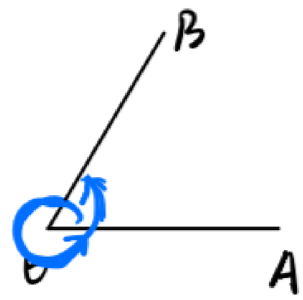


逆时针 正角

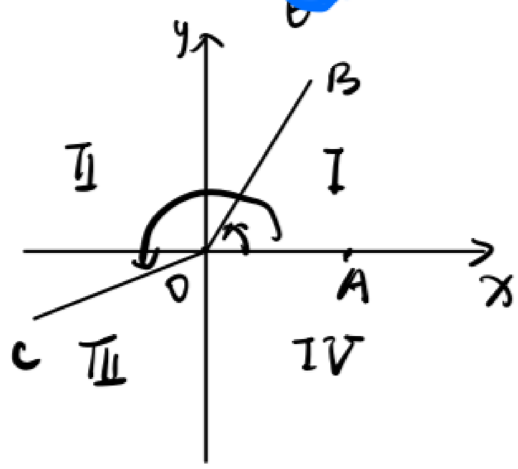
顺时针 负角

没有旋转 零角

例:

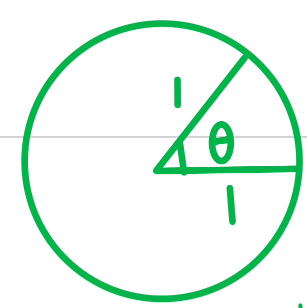


$420°$ 与 $60°$ 终边相同

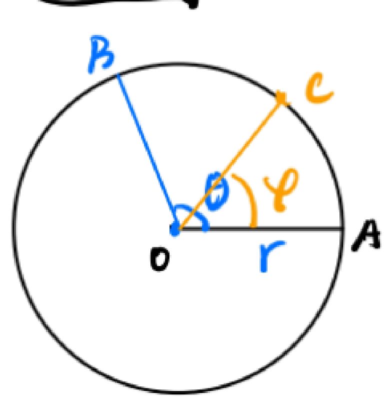


象限角（终边落在第几象限）

轴线角（……落在坐标轴上）



2. 弧度制



$\theta = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{r}$

$\overset{\frown}{AC} = r \quad \varphi = 1$ rad.

弧度制定义就是半径为1的圆中该角所对的弧长

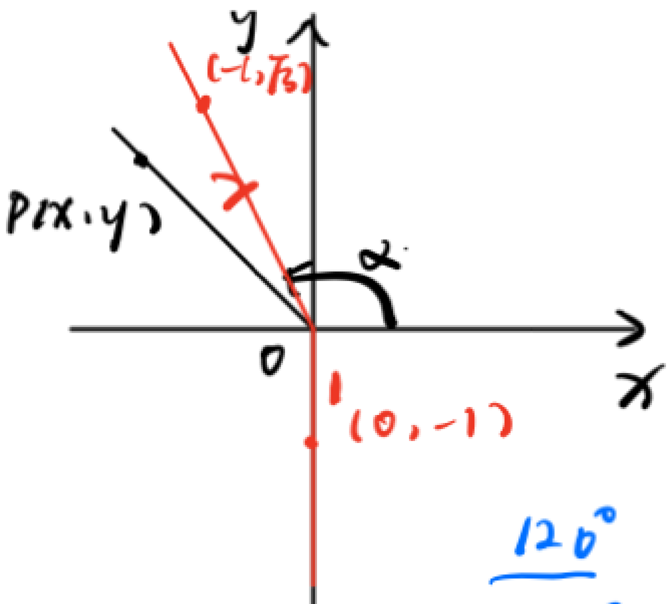
$r \cdot \alpha = l$

半径 弧度 弧长

$1\ \text{rad} \approx 57°$

角度弧度换算 $360° = \dfrac{2\pi r}{r}\ \text{rad} = 2\pi\ \text{rad}$

角度 $n°$，弧度是 α rad，有 $\dfrac{n}{360} = \dfrac{\alpha}{2\pi}$



记 $r = |OP| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

$\underline{120^\circ}$ $\quad \frac{120}{360}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi \ (rad)$

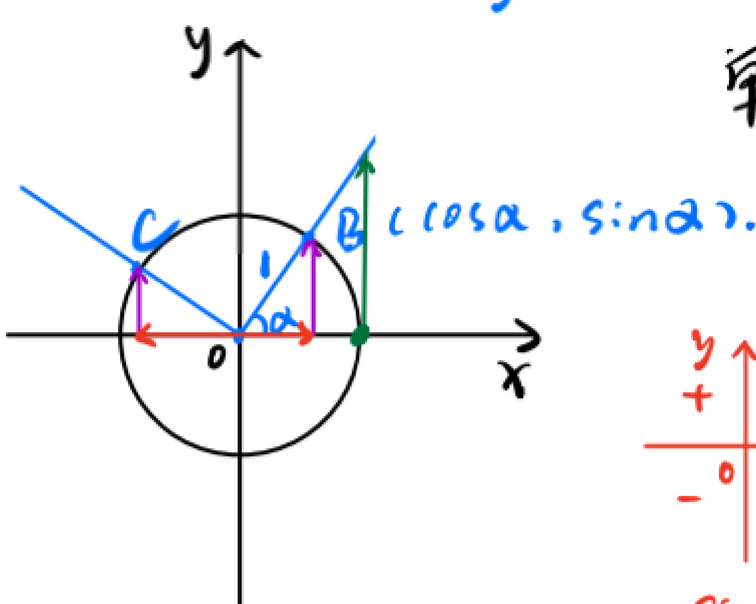
270° $\quad \frac{270}{360}\cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$

$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \sin\frac{3}{2}\pi = -1$

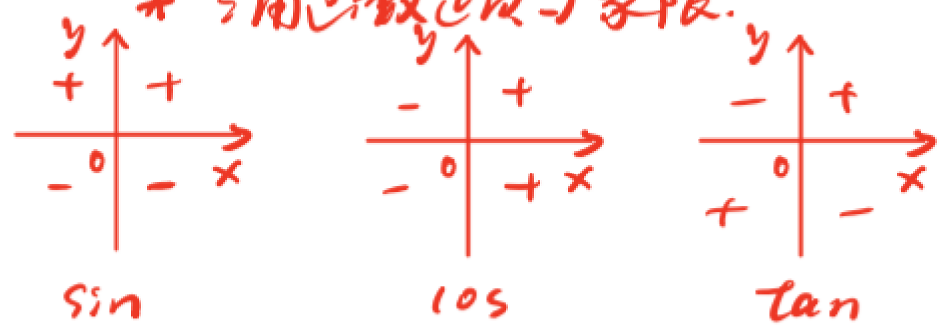
$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ $\qquad \cos\frac{3}{2}\pi = 0$

$\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$ $\qquad \tan\frac{3}{2}\pi$ 不存在

单位圆：$r=1$



* 三角函数正负与象限.



同角三角函数的关系 $\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4. 三角函数的诱导公式 $\quad$ 奇变偶不变 符号看象限.

三角函数名. $\quad$ 假设 α 在 I 象限

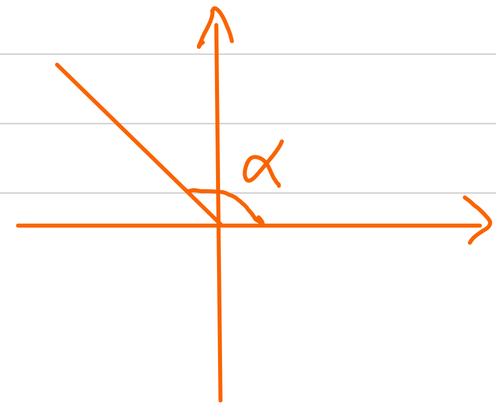
$k\in Z$

$\sin(\alpha + \frac{k\pi}{2})$ 与 α 的三角函数间的关系.

例：$\cos(\alpha+\frac{1094317}{2}\pi)$

$=\cos(\alpha+\frac{1}{2}\pi) = -\sin\alpha$

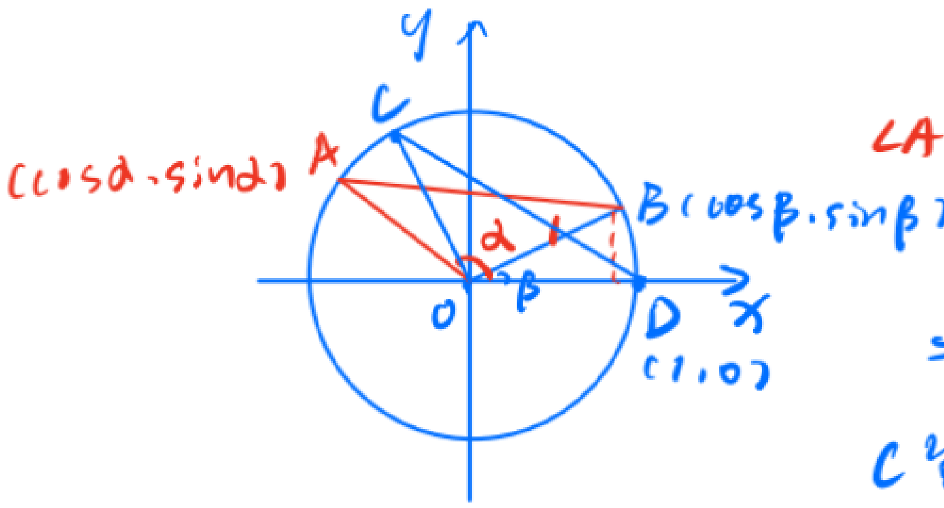
其中α角如右图



5、合角公式

α、β 任意角，有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$



$\angle AOB=\alpha-\beta$

$\angle AOC=\beta$

$\Rightarrow \angle COD=\alpha-\beta$

C 坐标：$(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$

$$|AB|^2=|CD|^2$$

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

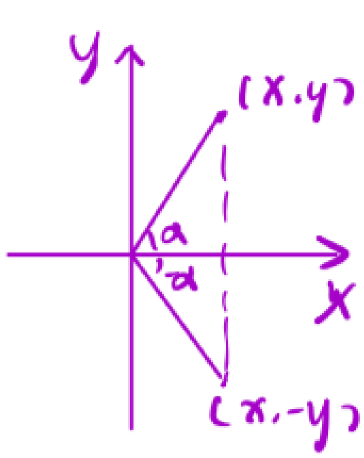
$$=\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))$$

$$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$



$\cos\alpha=\cos(-\alpha)=\frac{x}{r}$

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-(\frac{-y}{r})=-\sin(-\alpha)$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta .$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

*倍角公式 $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad = 2\cos^2\alpha - 1$

$$= 1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

上下同除. $\cos\alpha\cos\beta$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

例 61. 已知集合 $A=\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 180^\circ \pm 45^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$, 集合 $B=\{\beta \mid \beta = k\cdot 90^\circ + 45^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$, 则 A 与 B 的关系正确的是 (C)

A. $A \subsetneq B$ B. $B \subsetneq A$ C. $A = B$ D. A, B 之间没有包含关系

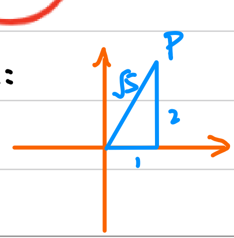
解: $\alpha = k180^\circ + 45^\circ = 2k90^\circ + 45^\circ$, $\alpha = k180^\circ - 45^\circ = (2k-1)90^\circ + 45^\circ$ $\therefore A \subseteq B$

$\beta = k90^\circ + 45^\circ = \frac{k}{2}180^\circ + 45^\circ$ (k为偶) $\beta = k90^\circ + 45^\circ = \frac{k+1}{2}180^\circ - 45^\circ$ (k为奇) $\therefore B \subseteq A$

$\therefore A = B$

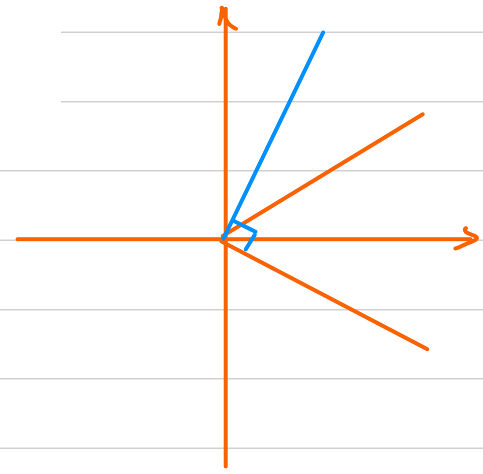
例 62. 已知角 α 的终边经过 $P(1,2)$, 则 $\tan\alpha\cdot\cos\alpha$ 等于 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

解:



$2\times\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

例 63. 化简 $\dfrac{\sin\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan^2(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2(\pi-\alpha)}$.



解：原式 $= \dfrac{[-\sin(\alpha+\frac{3}{2}\pi)][-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)]\tan^2\alpha}{\sin\alpha(-\sin\alpha)\ \cos^2\alpha}$

$= \dfrac{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{-\sin^2\alpha\ \cos^2\alpha}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

例 64. ① $\sin 34^\circ \sin 26^\circ - \cos 34^\circ \cos 26^\circ =$________.

② $\sin 47^\circ \cos 17^\circ + \cos 47^\circ \cos 107^\circ =$________.

解：① 原式 $= -\cos(34^\circ+26^\circ) = -\frac{1}{2}$

② 原式 $= \sin 47^\circ\cos 17^\circ - \sin 17^\circ\cos 47^\circ = \sin(47-17) = \frac{1}{2}$

例 65. 化简式子 $\dfrac{\sqrt{1-\sin 20^\circ}}{\sin 10^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos 20^\circ}}$.

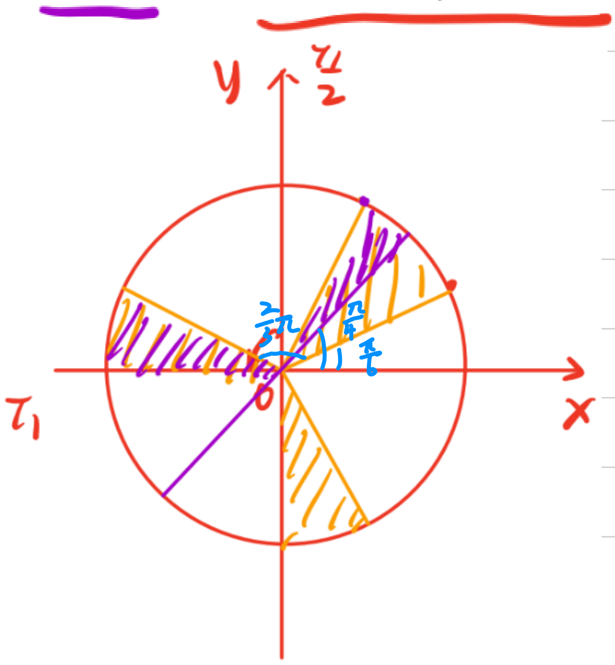
解：设 $\alpha=10^\circ$ ∴ 原式 $= \dfrac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}$

$= \dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\cos^2\alpha}}$

$= \dfrac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ ∵ $\alpha=10$ ∴ $\sin\alpha<\cos\alpha$

$= 1$

例 66. 已知 $\sin 3x > 0, \cos 3x < 0$，且 $\sin x > \cos x$，则 x 的取值范围为________.



第二象限：$(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi)$

∴ $\frac{\pi}{2}+2k\pi < 3x < \pi+2k\pi$

$\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$ ∴可画出左图黄色部分

设过点 (a,b)，∵ $\sin x > \cos x$ ∴ $\frac{b}{r} > \frac{a}{r}$ ∴在 $y=x$ 上方

∴ $\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{\pi}{3}+2k\pi$ 可画出紫色部分

∴ $\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

∴ $x \in (\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi) \cup (\frac{5}{6}\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$

例 68. 已知 $f(x)=\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{2+\sin x+\cos x}$，则 $f(x)$ 的最小值为________.

解: $\sin x\cos x=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x)^2-1]$　设 $\sin x+\cos x=t$

$\therefore f(x)=\dfrac{t^2-1}{2(2+t)}=\frac{1}{2}(t+2+\frac{3}{t+2}-4)\geq\sqrt{3}-2$

6. 万能公式

任意角 α，有

$\tan\frac{\alpha}{2}$ 取遍 R.

$$\boxed{\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}}\qquad\boxed{\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}\qquad \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

7、积化和差、和差化积。

积化和差：$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

形式相同部分

和差化积.　$\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta\\=&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\=&2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

其它公式同理。

8. 三角函数的图象和性质。

· 周期性　$f(x)$. $\exists T\neq 0$ s.t.

$\forall x \in D$，有 $f(x+T)=f(x)$

称 $f(x)$ 为周期函数.

所有周期中最小正数的为最小正周期

周期函数是否一定存在最小正周期？

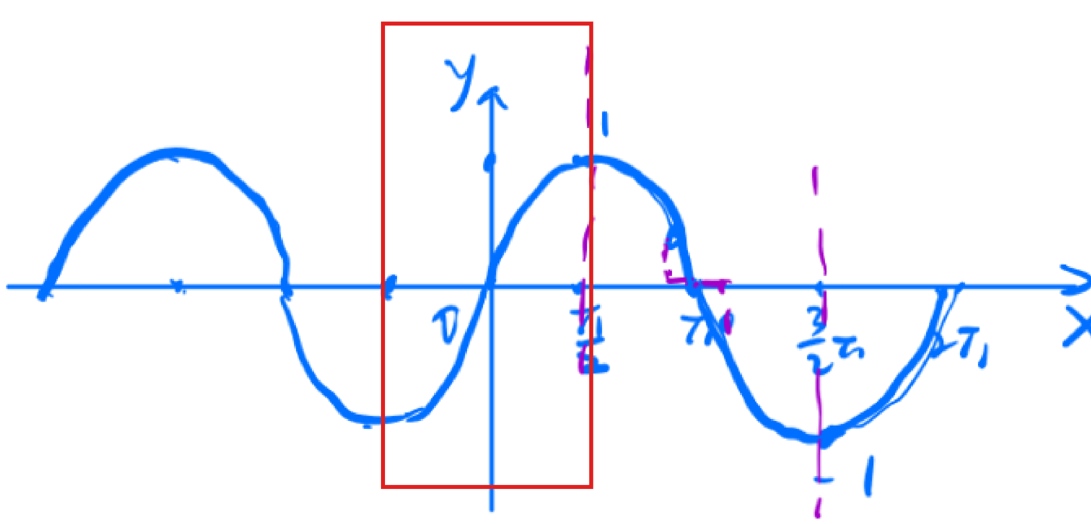
不一定存在 Dirichlet 函数

白噪声

$$\underline{D(x)} = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R \text{ 且 } x \notin Q \end{cases}$$

但是没有最小的正有理数.

- $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$



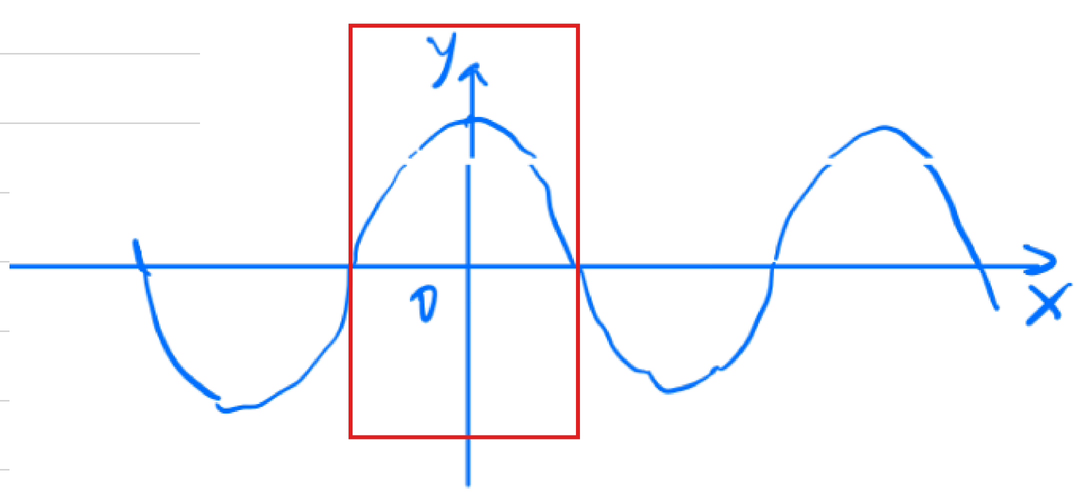
$y=\sin x$

$\sin(x+2\pi) = \sin x$

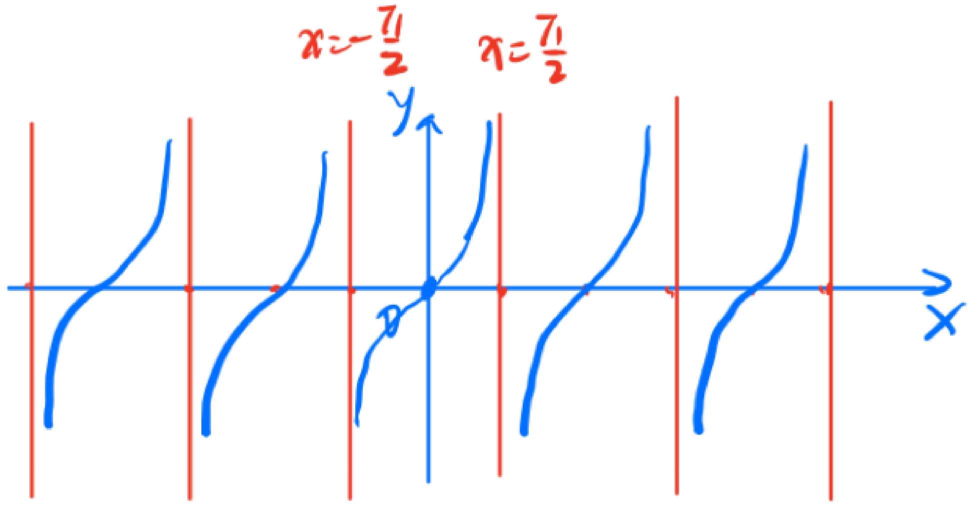
$\sin(x+\pi) = -\sin x = -\sin(\pi-x)$

$\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\underline{\cos x} = \sin\boxed{x+\frac{\pi}{2}}$



$y=\cos x$



$y=\tan x$

$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\tan(x+\pi)=\tan x$

$\tan x = -\tan(-x)$

$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$

$\sin x \to \sin\omega x \to A\sin\omega x \to A\sin(\omega(x+\frac{\varphi}{\omega}))$.

9. 反三角函数

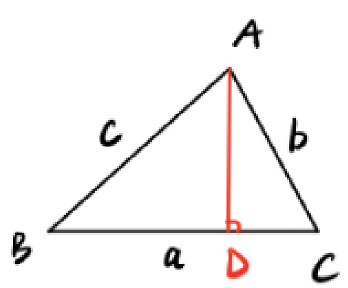
$f(x)=\arcsin x$ $x\in[-1,1]$ $\sin x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 反

$f(x)=\arccos x$ $\cos x$, $x\in[0,\pi]$ 反

$f(x)=\arctan x$ $x\in\mathbb{R}$ $\tan x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 反

解三角形

1. 余弦定理



我们有

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

2. 正弦定理 ΔABC中，角A,B,C所对边分别记作a,b,c，ΔABC的外接圆半径记作R，我们有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3. 三角形的面积公式

① $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a h_a$

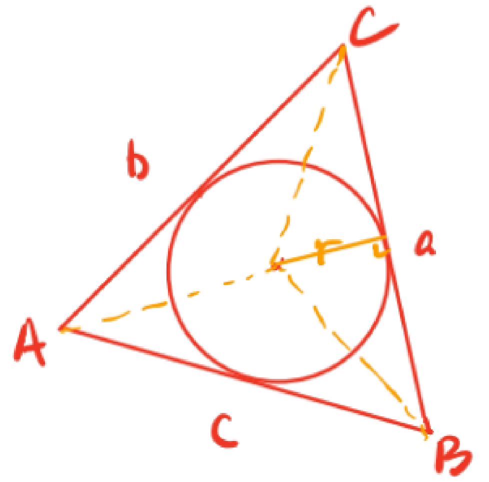
② $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C = \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ac\sin B$

$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R}$

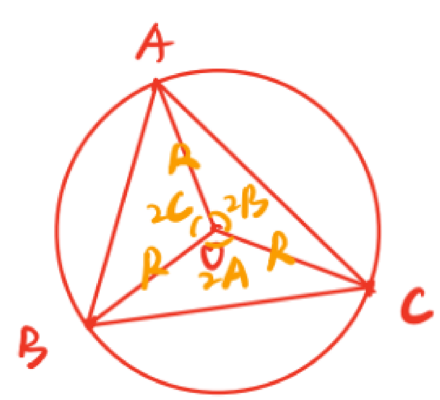
代入得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R}$

$= \frac{abc}{4R}$

③ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} r(a+b+c)$ （r 内切圆半径）



④ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$



$S_{\triangle ABC} = \underbrace{\frac{1}{2} R^2 \sin 2A}_{S_{\triangle BOC}} + \underbrace{\frac{1}{2} R^2 \sin 2B}_{S_{\triangle AOC}} + \underbrace{\frac{1}{2} R^2 \sin 2C}_{S_{\triangle AOB}}$

⑤（海伦公式）$\triangle ABC$ 中，A、B、C 所对边长为 a、b、c

记半周长 $p = \frac{a+b+c}{2}$，那么我们有

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4. 三角形中的三角函数等式

① 常用公式：

$$\sin(\underbrace{A+B}_{\pi-C}) = \sin C$$

$$\cos(A+B) = -\cos C$$

$$\tan(A+B) = -\tan C$$

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$$

② $\triangle ABC$（A、B、C均不为$\frac{\pi}{2}$）中.

有 $\tan A+\tan B+\tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

$$\tan A = -\tan(B+C)$$

$$= \frac{\tan B+\tan C}{\tan B\cdot\tan C-1}$$

$$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C = \tan A+\tan B+\tan C$$

③※ $\triangle ABC$中 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

积化和差 & 和差化积

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A-B)+\frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A-B)+\frac{1}{2}\sin(A+B)$$

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$