Informal Notes on Mathematics

2022.08.03

因为之前的数列点化已经很详细了，所以我们直接上题。

例 121. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\lg(\sin A), \lg(\sin B), \lg(\sin C)$ 成等差数列, 并且三个内角 A, B, C 也成等差数列, 试判断该三角形的形状.

解: $2\lg(\sin B) = \lg(\sin A) + \lg(\sin C)$, $2B = A + C \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \sin^2 B = \sin A \sin C = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore \cos(A-C) = \cos A\cos C + \sin A \sin C$

$= \cos(A+C) + 2\sin A \sin C$

$= -\cos B + \frac{3}{2}$

$= 1$

例 122. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 10 + \lg 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

$a_{n+1} - a_n$

解: $a_n = 10 + n\lg 2$ $\therefore$ 易知

例 123. 两个等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n, 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+1}$, 求 $\frac{a_n}{b_n}$.

解: $\boxed{\cancel{\frac{a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d_1}{b_1 + \frac{1}{2}(n-1)d_2} = \frac{2n}{3n+1}}}$

$a_n = \frac{S_{2n-1}}{2n-1}$

$b_n = \frac{T_{2n-1}}{2n-1}$

$\therefore \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1} = \frac{4n-2}{6n-2} = \frac{2n-1}{3n-1}$

例 124. 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等比数列, 那么 (C)

A. $\{a_n + b_n\}, \{a_nb_n\}$ 都一定是等比数列

B. $\{a_n + b_n\}$ 一定是等比数列, 但 $\{a_nb_n\}$ 不一定是等比数列

C. $\{a_n + b_n\}$ 不一定是等比数列, 但 $\{a_nb_n\}$ 一定是等比数列

D. $\{a_n + b_n\}, \{a_nb_n\}$ 都不一定是等比数列

解: A. $\{a_n+b_n\}$ 一般不是 (X) B. 同上 (X) C. (√) D (X)

例 125. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_n = 2a_n - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$, 求使 $(n-8)b_n \geqslant nk$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立的实数 k 的取值范围. $k \leq -10$

解: $S_{n+1} - S_n = 2(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1} = 2a_n$ $\therefore a_n = 2^{n-1}a_1$

∵ $a_1 = S_1 = 2a_1 - 2$ ∴ $a_1 = 2$ ∴ $a_n = 2^n$

(2) $b_n = \log_2 2 + \log_2 2^2 + \cdots + \log_2 2^n$

$= 1 + 2 + \cdots + n$

$= \frac{n(n+1)}{2}$ ∴ $\cancel{n}(n-8)(n+1) \geq 2\cancel{n}k$

∵ $(n-8)(n+1) = n^2 - 7n - 8$，当 $n=3$ 时最小 ∴ $n^2 - 7n - 8 \geq -20$

∴ $k \leq -10$

例 126. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{12} = 21$，则 $a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} =$ 7.

解：$12 \div 2 = 6$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} + a_{12}$ $21 \div 6 \times 2 = 7$

例 127. 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 15, a_1a_2a_3 = 80$，则 $a_{11} + a_{12} + a_{13} =$________.

$d > 0$

解：$2a_2 = a_1 + a_3$ ∴ $a_2 = 5$ ∴ $a_1 a_3 = 16$ ∵ $a_1 + a_3 = 10$

∴ $a_1 = 2$, $a_3 = 8$ ∴ $d = 3$

∴ $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3a_1 + 10d + 11d + 12d$

$= 6 + 33 \times 3$

$= 105$

例 128. 设 a_1, d 是等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差，前 n 项和 S_n 满足 $S_5S_6 + 15 = 0$，则 d 的取值范围是________.

Δ

解：∵ $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ ∴ $S_5 = 5a_3 = 5a_1 + 10d$

∵ $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$ ∴ $S_6 = 6a_3 + 15d$

∴ $(5a_1 + 10d)(6a_1 + 15d) + 15 = 0$

∴ $2a_1^2 + 9da_1 + 10d^2 + 1$

$\Delta = 81d^2 - 8(10d^2 + 1) \geq 0$

$d \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$

例 129. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+45}{n+3}$，则使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 5个.

解：$\frac{a_n}{b_n} = \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}} = \frac{14n+38}{2n+2} = 7 + \frac{12}{n+1}$

$n = 1, 2, 3, 5, 11$

∴ 5 个 （我还想了半天为什么是54 结果那个字是个吗）

例 130. 已知数列 $\{a_n\}$: $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots, \frac{1}{1+2+\cdots+n}, \cdots$, 则它的前 n 项和 $S_n =$ $\underline{\frac{2n}{n+1}}$.

解: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\therefore a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

$\therefore S_n = 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$

例 131. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为零, 且 a_2, a_3, a_9 (中项) 构成等比数列, 则 $\frac{a_4+a_5+a_6}{a_2+a_3+a_4}$ 的值是________.

解: $a_3^2 = a_2 a_9$ $\because a_3 = a_2+d$, $a_9 = a_2+8d$

$\therefore (a_2+d)^2 = a_2(a_2+8d)$ $\therefore a_2 = \frac{1}{5}d$

$\therefore \frac{a_4+a_5+a_6}{a_2+a_3+a_4} = \frac{-\frac{12}{5}d+3d+4d+5d}{\frac{1}{5}d\times 3+d+2d} = \frac{12\times 4}{3+15} = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}$

例 132. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = x\cdot 3^{n-1}-6$, 则 x 的值为 $\underline{18}$.

解: $a_n = S_n - S_{n-1} = 2\times 3^{n-1} x$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, $q=3$

$\therefore a_2 = S_2 - S_1 = (3x-6)-(x-6) = 2x = 3(x-6)$

$\therefore x = 18$

由于特殊原因, 今天先到这里