Informal Notes on Mathematics

2022.08.06

Тодаы летьс леарн саие Аощу. летьс старт бы саие exаuплес.

例1. 设 $A=\{2,0,1,3\}$，$B=\{x|-x\in A, 2-x^2\notin A\}$，求B中元素和。

解：由题知 $B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$

当 $x=-2$ 时，$2-x^2=-2\notin A$，$-2\in B$

当 $x=0$ 时，$2-x^2=2\in A$，$0\notin B$

当 $x=-1$ 时，$2-x^2=3\in A$，$-1\notin B$

当 $x=-3$ 时，$2-x^2=-7\notin A$，$-3\in B$

$\therefore B=\{-2,-3\}$ $\therefore$ 和为 -5

Тай чан шишуэань нет шунешзи шуяньшузай алреады духуи лэ.

例2. 对任意 $x,y\in S$，若 $x+y\in S$，$x-y\in S$，则称S对加减法封闭. $S\subsetneq\mathbb{R}$

(1) 举一个S的例子。

解：实际上我感觉任何实数上的加法群都是可行的，只要把加法定义在同余意义下，比如 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}:=\{\bar0,\bar1,\bar2,\bar3,\bar4,\bar5\}$，但如果是寻常的加法那估计不可能是有限的了。让 $S=k\mathbb{Z}$ 即可。

(2) 证明：若 S_1、S_2 均 $\subsetneq\mathbb{R}$，且对加减封闭，则必有 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $c\notin S_1\cup S_2$

解：这道题思路上很像我之前做Dedekind分割题目时的感觉。

$\because S_1\subsetneq\mathbb{R}$ $\therefore$ 存在 $a\in\mathbb{R}$，$a\notin S_1$ $\because S_2\subsetneq\mathbb{R}$ $\therefore\exists b\in\mathbb{R}$，$b\notin S_2$

令 $c=a+b$，$c\notin S_1\cup S_2$. 若 $a,b\notin S_1\cup S_2$，则命题得证；若 $a,b\in S_1\cup S_2$，则 $c=a+b\in S_1\cup S_2$，矛盾。$\therefore$ 命题得证。

例3. $M\subseteq\{1,2,\cdots,2011\}$，满足：M的任三个元素中，都可以找到两个元素 a,b，使得 $a|b$ 或 $b|a$，求 $|M|$ 的最大值。

解：当然是从最小的情况开始叠了。

$1,2,2^2,2^3,\cdots\ 2^{10}$，$2^{11}=2048>2011$，$\cancel{2^{11}}$

$3,3\times2,3\times2^2,\cdots,3\times2^9$，$3\times2^{10}=3072>2011$，$\cancel{3\times2^{10}}$

然后就不能再递推了，如果选 a 与3互质，则 $3\nmid a$，如果不互质，设另个因子为 p.

若 $p=2^n$，则 a 已 $\in M$，若 $p\neq2^n$，则 a 无法保证满足条件。因此不能。

以上是我自己的想法。下面是证明 $|M|\le21$（即之前举的情况）

设 $|M|\ge22$，设M中元素为 $a_1<a_2<\cdots<a_k$

首先证明 $a_{n+2}\ge2a_n$（从这步开始我怎么感觉就和我说有点像了。但我是建立在已知从2,3出发的基础上，但它是虽然清楚是这么一回事，但并不假定，更一般化地去处理），否则 $a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<2a_n$，那么 a_n，a_{n+1}，a_{n+2} 不满足条件。

（Шао，шуйеши. 最小的倍数是2），$\therefore$ 矛盾

$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{5}{132}$ 。 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$ 的值 （这道题和上文没关系）

由上述结论知，$a_4\geqslant 2a_2\geqslant 2^2$ ，$a_6\geqslant 2a_4\geqslant 2^3$ … $a_{22}\geqslant 2a_{20}\geqslant 2^{11}>2011$，矛盾
$\therefore |M|$ 最大为21。

例4. $f(x)=x^2+ax+b$ ，$A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbb{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),x\in\mathbb{R}\}$

(1) 证明：$A\subseteq B$

证明：显然。$\because x=f(x)\in A$ $\therefore f(f(x))=f(x)=x$ $\therefore x\in B$
$\therefore \forall x\in A$，$x\in B$ $\therefore A\subseteq B$

(2) $A=\{-1,3\}$，求B

解：$\begin{cases}(-1)^2-a+b=-1\\ 9+3a+b=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-3\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^2-x-3$ ，

$\therefore (x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$

$\because -1,3\in A\subseteq B$

$\therefore (x^2-2x-3)$ 是 $f(f(x))-x$ 的一个因式

$\therefore (x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3-x$

$=(x^2-2x-3)(x^2-3)$

$\therefore x=-1,3,\pm\sqrt{3}$ $\therefore B=\{1,3,\pm\sqrt{3}\}$

例5、（之前在集合那一节的笔记上做过了）

例6，$n\in\mathbb{N}^*$，$n\geqslant 15$，A、B都是 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$，证明，A中或B中必有两个不同的数，它们的和为完全平方数

证明：$\{A,B\}$其实是I的一个划分，但这个结论和划分没关系。

$n\geqslant 15$ 这个条件是一个思想的出发点，$1+15=16$ 是完全平方数，可以以此为基础去想。不妨设 $1\in A$ （W.L.O.G），若命题不成立，

$\because 1+3=4=2^2$ $\therefore 3\in B$ $\because 3+6=9=3^2$ $\therefore 6\in A$

$\because 10+6=16=4^2$ $\therefore 10\in B$

若 $15\in A$，则 $1+15=4^2$，矛盾；若 $15\in B$，则 $10+15=5^2$，矛盾。

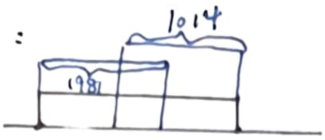
综上，原命题成立。

例7， 2021年宿中一创招生题，之前都考过一遍了。

$\boxed{\text{例8.}}$ 设 m,n 是给定的大于1的整数，$a_1<a_2<\cdots<a_m$ 都是整数，证明：存在一个整数集的子集T，$|T|\leqslant 1+\frac{a_m-a_1}{2n+1}$，且对于每个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 均有 $t\in T$ 及 $s\in[-n,n]$，s.t. $a_i=t+s$

练习题：

A1：



显然，为 $1981+1014-2012=983$

A2：不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4$ ∴ $\underbrace{a_1+a_2+a_3=-1, \quad a_2+a_3+a_4=8}$

∴ $\{a_1+a_3+a_4,\ a_1+a_2+a_4\}=\{3,5\}$

∴ $a_1+a_3+a_4=5,\quad a_1+a_2+a_4=3.$

∴ 解方程组即可。为了方便，我们用矩阵做

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&-1\\0&1&1&1&8\\1&0&1&1&5\\1&1&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&-1\\0&1&1&1&8\\0&-1&0&1&6\\0&0&-1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&-1\\0&1&1&1&8\\0&0&1&2&14\\0&0&0&3&18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-9\\0&1&0&-1&-6\\0&0&1&2&14\\0&0&0&3&18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&6\end{bmatrix}$$

（矩阵还不熟，还得多练）

$$\therefore \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\6\end{bmatrix} \Rightarrow A=\{-3,0,2,6\}$$

A3：穷举即可。

A4：∵ $A\cap B=\{2,5\}$， ∴ $a^3-2a^2-a+7=5$

∴ $a^3-2a^2-a+2=0$ ∴ $(a-2)(a^2-1)=0$

∴ $a=\pm 1$ ∴若 $a=1$，则 $-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+4=5$，但 $2\notin B$，舍

若 $a=-1$，则 $-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+4=2$，$a^3+a^2+3a+7=4$， 舍

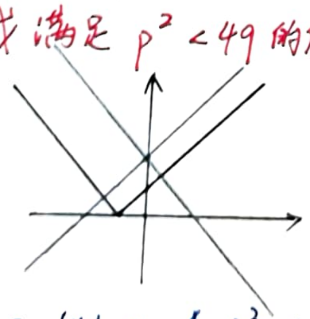
∴不存在

A5：$\cancel{1},3,5,\cancel{7},9\notin X$， $x\subseteq B=\{\cancel{1},4,\cancel{7},10\}$

∴ $X\subseteq\{4,10\}$ ∴ $\begin{cases}p=-8\\q=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=-20\\q=100\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=-14\\q=40\end{cases}$

或满足 $p^2<49$ 的所有实数对 $(X=\emptyset)$

A6：



$a\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)$

A7：$B=\{y\mid y=(b-3)^2+1,\ b\in N^*\}$

$A=\{x\mid x=a^2+1,\ a\in N^*\}$

∴ $A\subsetneqq B$

解：这题来自 CMO 2010.（То тем тхо трутх，ищедао ти я йкайши лянь дути доу фэи цзин，ваньцуань нет ищидао цзеньмэ рушоу.）

整理一下，对于任何一个增的数$\{a_m\}$，都有 $t\in T$，$s\in[-n,n]$ 使得 $a_i=t+s$，其中 $|T|$ 不大于某个关于 n 及 a_m 的式子。

令 $a_1=a$，$a_m=b$，作带余除法 $b-a=(2n+1)q+r$，$q,r\in\mathbb{Z}$，$r\in[0,2n]$

取集合 $T=\{a+n+(2n+1)k \mid k=0,1,\cdots q\}$，则 $|T|=q+1\le 1+\frac{b-a}{2n+1}$

此时逐次取 $s=-n,-n+1,\cdots,n$，令 $B=\{t+s \mid t\in T,\ s\in[-n,n]\}$

$\therefore \max B=\max T+\max S=a+2n+(2n+1)q\ge a+r+2n+q=b=a_m$

$\min B=\min T+\min S=a=a_1$

$\therefore$ B 包含所有在 a_1 到 a_m 之间的整数 $\therefore a_i\in B$ $\therefore$ 命题得证。

（这道题实际也是由条件"猜"出个 T，再证明 T 符合条件。既然 $|T|\le 1+\frac{a_m-a_1}{2n+1}$，那就让 $|T|$ 取到最大。此时把 n 看作个无关的定值，则 $2n+1$ 唯一确定 $\therefore$ 我们可以构造一列长度不超过 $1+\frac{a_m-a_1}{2n+1}$ 的整数，这列整数再分别加上 $[-n,n]$ 中每个整数，我们所要保证的就是新的这列整数恰好是连续的，且最大值大于等于 a_m，而 $a+n+(2n+1)k$ 到 $a+(2n+1)(k+1)$ 之间有 $2n$ 个未取到的整数，这部分恰巧可以用 $[-n,n]-\{0\}$ 中每个整数"填满"。）

例7：设 A 的元素都是正整数，满足如下条件：

(1) $|A|\ge 3$

(2) 若 $a\in A$，则 a 的所有因数 $\in A$

(3) 若 $a\in A$，$b\in B$，$1<a<b$，则 $1+ab\in A$

试解决以下问题：

(1) 证明：$1,2,3,4,5\in A$

证明：$\because |A|\ge 3$ $\therefore A\ne\varnothing$ $\therefore 1\in A$ $\because |A|\ge 3$ $\therefore$ 设 $1<a<b$，$1,a,b\in A$

$\therefore$ 若 a,b 中有一个偶数，则 $2\in A$，若 a,b 都为奇数，则 $1+ab$ 为偶数 $\in A$

$\therefore 2\in A$、设 $1,2,a\in A$ $(a>2)$，则

$1+2a\in A$ $\therefore 1+2(1+2a)\in A$，即 $3+4a\in A$

$\therefore 1+(1+2a)(3+4a)=4+10a+8a^2$

$\therefore$ 若 a 为偶数，$4\mid(4+10a+8a^2)$，$4\in A$；若 a 为奇数，则把 $4+10a+8a^2$ 作为 a 再如上来一次，易知 $4\in A$

$\because 2\in A,4\in A$ $\therefore 1+8=9\in A$ $\therefore 3\in A$

$\because 1+2\times3=7\in A$ $\therefore 1+2\times7=15\in A$ $\therefore 5\in A$

$\therefore$ 命题得证。

(2) 问：2005 是否为 A 的元素

解：是。 $2005=1+4\times\underset{\curvearrowright}{501}$ $1+5\times\underset{\curvearrowright}{100}$ $1+3\times\underset{\curvearrowright}{33}$ $1+2\times16$

$\because 16=1+3\times5$ $\therefore 16\in A$ $\therefore 2005\in A$

A8：似乎很经典。 $\lg(xy)=0$ （否则 $x=y$ 且 $\lg(xy)$ 无定义），$xy=1$

$\begin{cases} \cancel{x=|x|} \\ xy=y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=y \\ xy=|x|=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

若 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，则 $x=xy$，舍；若 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$，则原式 $=$

$$(-1-1)+(1+1)+(-1-1)+\cdots+2$$
$$=0$$

A9：最大：$a=1$，$b=2$，$\frac{3}{a}+b=5$

最小：$\because a\le b$ $\therefore \frac{3}{a}+b \geqslant 2\sqrt{\frac{3b}{a}}$，当 $\frac{3}{a}=b$ 时最小

$\therefore ab=3$ $\therefore$ 此时 $\frac{3}{a}+b=2\sqrt{\frac{3b}{a}}$，当 $\frac{3b}{a}$ 最小时，原式最小

$\because a\le b$ $\therefore a=b=\sqrt{3}$ 时最小 $\therefore$ 最小为 $2\sqrt{3}$

$\therefore M-m=5-2\sqrt{3}$

A10：都很显然。

(1) 设 $s=a^2+b^2$，$t=c^2+d^2$

$$\therefore st=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2$$
$$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2+2abcd-2abcd$$
$$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

(2) $\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}$，其余同 (1)

A11：这题应该和之前的例3、例8相近，先构造

（Гуаньцянь ценьмэ гоуцзао ацао）算了还是看答案吧

若 $x\equiv 0,\pm1,\pm2,\pm3 \bmod 7$，则 $x^2\equiv 0,1,4,2 \bmod 7$

（这里的 ±1 其实就 1 或 6。群论的角度看，这种表示是显然的）

（Гуочжень я хай дей шуюйе шулинь ма?）

$\therefore$ 若 $x^2+y^2\equiv 0 \bmod 7$，则 $x^2\equiv y^2\equiv 0 \bmod 7$，即 $x\equiv y\equiv 0 \bmod 7$

$\therefore$ x 和 y 最多有一个 7 的倍数 $\therefore$ 所有不是 7 的倍数加上一个 7 的倍数即满足条件

$\therefore \max|S|=50-\left[\frac{50}{7}\right]+1=44$

A12：由调和不等式，$a<\left[\frac{a+b}{2}\right]\le\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right]\cancel{\le b}$

答案上方法是真的妙。问题本质是证明 $M=\{1,2,3,\cdots,2006\}$，所以可以证明任何相邻的两个数 x,y 之差必须 <2

∴ 用反证法。设 $y-x \geq 2$ ∴ $y-1 \geq x+1$

∴ 根据均值不等式（竟然和我一开始的思路一样），我们有（似乎并不是均值不等式）

$$\boxed{x+1 < \frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \cancel{\le} y}$$

$x < \left[\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right] < y$ ∴ $x+1 \leq \left[\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right] \leq y-1$

（果真是直接用取整的性质。既然不等于 x, y，那肯定为 $x+1$, $y-1$ 并两者之间）

∴ $\left[\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right]$ 一定是 x、y 之间某个整数，与 x, y 相邻不符，矛盾

∴ 得证，由于 $2007 \notin M$，所以 $2006 = \sup M$

∴ $M = \{1, 2, 3, \cdots\cdots, 2006\}$ ∴ 个数为 $2^{2006}-1$

A13：果真做竞赛和数分思维有关。遇到这种题基本和做数分时卡在相似的地方

只要证明 $0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 即可（理由：若 $0 \in S_1$，对于 $\forall y \in S_2$，$y-0=y \in S_3$，∴ $S_2 \subseteq S_3$；对于 $\forall z \in S_3$，$z-0 \in S_2$ ∴ $S_3 \subseteq S_2$ ∴ $S_2 = S_3$）

若 $0 \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3$，取 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 中最小正整数 a（因为若 $x \in S_i$，则 $-x \in S_j$，$S_{i,j,k}$ 中一定有非负元素），不妨设 $a \in S_1$，取 $S_2 \cup S_3$ 中最小正整数 b，我们有 $b-a>0$（否则我们有 $0 \in S_3$，命题得证）∴ $0 < b-a < b$

∴ $b-a \in S_3$，与 b 是 $S_2 \cup S_3$ 中最小正整数矛盾 ∴ $0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$

∴ 命题得证

A14：硬算即可。

A15：似乎也很经典。$a_1 \in B$，a_1 是 A 中最小的 ∴ a_1^2 是 B 中最小的

∴ $a_1 = a_1^2$ ∴ $a_1 = 1$ ∴ $a_4 = 9$ ∴ $a_4^2 = 81$

∴ a_2 或 $a_3 = 3$ ∴ 若 $a_2 = 3$，则

$A \cup B = \{1, 3, a_3, 9, a_5, a_3^2, 81, a_5^2\}$

$$∴ \begin{cases} 1+3+a_3+9+a_5+a_3^2+81+a_5^2 = 224 \Rightarrow a_3+a_3^2+a_5+a_5^2 = 130 \\ 4 \leq a_3 \leq 8 \Rightarrow 16 \leq a_3^2 \leq 64 \\ a_5 \geq 10 \Rightarrow a_5^2 \geq 100 \end{cases}$$

∴ $a_3 = 4$，$a_5 = 10$ ∴ $A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$

若 $a_3 = 3$，则 $a_2 = 2$，a_5 不是整数（舍）

∴ $A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$

B16：

$1, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots\cdots 2^{10}$, $2^{11} > 2000$ (×)

$3, 3\times2^2, 3\times2^3, \cdots\cdots 3\times2^9$, $3\times2^{10} > 2000$ (×)

$7, 7\times2^2, 7\times2^3, \cdots\cdots, 7\times$

不可行

任何数 x 本身和它的5倍不能同时属于 A，所以我们先找到5的倍数

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, \cdots\cdots, 1999\}$，然后看看能否改进。

唔，仍然不可行。它只说不能是另一个数的5倍，但是10倍.15倍还是可行的。

答案是$\{1\sim3;\ 17\sim80;\ 401\sim2000\}$，共1667个元素，看来是扔掉$3\times5=15$，$\frac{80}{5}=16$，以及$80\times5=400$。我不理解它为何非要扔掉这几个。如果扔80，取$16\sim79$，$79\times5+1\sim2000$ —— 啊确实不行。现在大概理清了：$\frac{2000}{5}=400$，401到2000都是可行的（只要排除其中5的倍数除以5后的数，即81到400 ∴剩余区间中，$17\sim80$也是同理。∵$3\times5=15<17$，$4\times5=20>17$ ∴同样只能取$1\sim3$。但我还是好奇为什么不"牺牲"2000，从更小的数出发。它如何肯定从2000开始不断除以5的操作一定能构造出最大的集合（想想又觉得挺符合直觉倒是）

下面是证明为什么1667是最大的了。若$|A|\geq1668$，则排除掉$(1,5)$，$(2,10)$，$(3,15)$，$(t,5t)$，$(k,5k)$（$4\leq t\leq16$，$81\leq k\leq400$）中的数外，剩1331个数满足条件。∵共1668个以上 ∴至少要从那336个数对中取出337个数 ∴一定有两个数属于同一数对 ∴矛盾。

竞赛今天就到这里吧，劳烦了。