Informal Notes on Mathematics

2022.08.08

Цзуньщунь ши чжень тама лей.

B17：首先要考虑任两个集合有交，这个交都是单元集，但不能是同一类个元素，否则无法满足(3)。那我们要考虑同一个元素最多同时属于几个集合。既然它给了"每个 A_i 含有30个元素"，那我们就可以从30出发去想。假设 $a \in A_1, A_2, \cdots A_{30}$，且为这三十个集合的唯一的交。如果 A_{31} 与前30个集合的交没有公共元素，即 $a \notin A_{31}$，那么 A_{31} 必定包含来自 $A_1 \sim A_{30}$ 的各一个非 a 的元素，正好30个。此时考虑 A_{32}，无论如何都一定与前30个集合中的某一个有两个相同元素（理由：若 $a \in A_{32}$，则有两个相同元素，反之则）或有 $A_{32} \cap A_{31} \cap A_i = A_{31} \cap A_i$。可以一直这么操作直到遍历完某个集合中除 a 外的所有元素。（发现只有大于30个，即 $a \in A_1, A_2, \cdots A_{31}$ 时不行，理由和构造 A_{31} 的过程相同。我本来以为30也不行，现在一看这恰好是满足情况的最大量）操作示例：（以每个集合含有3个元素，构造 A_4 及往后为例）

$A_1 = \{1, 2, 3\}$，$A_2 = \{1, 4, 5\}$，$A_3 = \{1, 6, 7\}$

$\therefore$ 按上文构造 $A_4 = \{2, 4, 6\}$。如令 $2 \in A_5$，则有 $1 \times 1 = 1$ 种，令 $4 \in A_6$，则有 $1 \times 1 = 1$ 种，令 $6 \in A_7$，又有 $1 \times 1 = 1$ 种。$\therefore$ 共 $4 + (1+1+1) = 7$ 种

以此类推，当出现三十的情况时，（和答案做法不太一样，有时间的话再看）有 $31 + 28 \times 30 = 871$ 个集合。此即为所求。

$\boxed{\text{B18}}$：我试着构造两组：

(1) $\{1 \sim 4, 6 \sim 7, 9, 12, 15, 18, \cdots, 1998\}$，$|A| = 670$

(2) $\{2000 \sim 1997, 1995 \sim 1994, 1992, 1989 \cdots\}$，$|A| = 670$

唔，都不对。

$2000 = 11 \times 181 + 9$，取 $A = \{x \mid x = 11t+1, 11t+4, 11t+6, 11t+7, 11t+9, 0 \le t \le 181\}$，则为满足情况的最大集合。我很好奇这个 1, 4, 6, 7, 9 是哪来的

$11(t+1)+1-4 = \underline{11t+8}$，$11(t+1)+1-7 = \underline{11t+5}$，$11(t+1)+4-4 = \underline{11t}$

$11(t+1)+6-4 = 11t+13 \Rightarrow \underline{11t+2}$，$11(t+1)+6-7 = \underline{11t+10}$，

$11(t+1)+7-4 = 11t+14 \Rightarrow \underline{11t+3}$，$11(t+1)+9-4 = 11t+16 \Rightarrow \underline{11t+5}$

去掉以上6种同余情况，剩下1, 4, 6, 7, 9。确实不能理解为什么，但怎么排出来的还是个问题。从上面我列的式子看，以下数对中的数不能同时出现：

(1, 8)，(1, 5)，(4, 0)，(6, 2)，(6, 10)，(7, 3)，(7, 0)，(9, 5)

、、、、、、、、、、

那我为什么不由1去掉5, 8，由2去掉6, 9，由3去掉7, 10，由4去掉8, 11，由5 → 9, 1，6 → 10, 2，7 → 3, 11，8 → 1, 4，9 → 5, 2，10 → 3, 6，11 → 4, 7，每个数都是"平等地"被去掉两次，却保留1, 4, 6, 7, 9呢

$\boxed{\text{问题保留}}$

B19：拓扑的定义。所谓T实际是 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 上的拓扑空间。穷举即可。

例 133. 在等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中, a_1 最小, 且 $a_1+a_n=66, a_2a_{n-1}=128$, 前 n 项的和 $S_n=126$,

则 $n=$ ___6___.

解: $a_2a_{n-1}=a_1a_n=128$, $a_1+a_n=66$ $\therefore a_1=2, a_n=64$ (a_1最小)

$\because S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{2-64q}{1-q}=126$ $\therefore q=2$

$\therefore n=\log_2(\frac{64}{2})+1=6$

例 134. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和记为 S_n, $S_m=20$, $S_{2m}=60$, 则 $S_{3m}=$ ___140___.

练习

m是固定的一个整数.

解: i $q=1$ $\therefore ma_1=20$, $2ma_1=60$, 舍

ii $q\neq1$ $\therefore \frac{a_1(1-q^m)}{1-q}=20$, $\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}=60$

$S_{2m}-S_m=40=(q^m-q^{2m})\cdot\frac{a_1}{1-q}$

$S_{3m}-S_{2m}=(q^{2m}-q^{3m})\frac{a_1}{1-q}$

$\because \frac{S_{3m}-S_{2m}}{S_{2m}-S_m}=\frac{1}{q^m}$, $\frac{S_{2m}-S_m}{S_m}=\frac{1}{q^m}=\frac{40}{20}=2$

$\therefore S_{3m}-S_{2m}=2\times40=80$

$\therefore S_{3m}=60+80=140$

例 135. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 并且对任意正整数 n, 都有 $S_{n+2}=4S_n+3$, 则 $a_2=$ __~~3~~或6__.

2

解: $S_{n+2}=a_1+a_2+q^2S_n=4S_n+3$

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $S_{n+2}=\frac{a_1(1-q^2q^n)}{1-q}=a_1+\frac{qa_1-q^2q^na_1}{1-q}=a_1+a_2+\frac{q^2a_1-q^2q^na_1}{1-q}=a_1+a_2+q^2S_n$

$\therefore (q^2-4)S_n=3-a_1-a_2$ 定值

$\therefore q^2-4=0$, $a_2+\frac{a_2}{q}=3$

$\therefore q=2 \rightarrow a_2=2$

$q=-2 \rightarrow a_2=6$

例 136. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, 有 $2S_n=2a_n^2+a_n-1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ________.

解: $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=2a_n^2+a_n-2a_{n-1}^2-a_{n-1}$

两边同时减$2a_n$: $2a_n^2-a_n-2a_{n-1}^2-a_{n-1}$

$\therefore 2(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})-(a_n+a_{n-1})=0$

$\therefore (2a_n-2a_{n-1}-1)(a_n+a_{n-1})=0$ $\because$各项为正 $\therefore a_n+a_{n-1}\neq0$

$\therefore 2a_n-2a_{n-1}-1=0$, $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}$ $\therefore a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$

练习

例 137. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n=$ (A)

裂项

A. $2+\ln n$

B. $2+(n-1)\ln n$

C. $2+n\ln n$

D. $1+n+\ln n$

解: $\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1)-\ln n$

$\therefore a_n = a_1+\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln n-\ln(n-1)$

$=2+\ln n$

保留: 先到这里, 先换别的题 (至 137 题)

数学归纳法 与 数列不等式

- 数学归纳法证明命题在 $\mathbb{N}$ (不含 0) 或 $\mathbb{N}$ 的某个局部成立

* Peano 公理其中的归纳公理

S 是 $\mathbb{N}$ 的一个子集, $1\in S$

而且对于任意 S 中元素, 其后继元也在 S 中, 那么 $S=\mathbb{N}$

- 数学归纳法: $P(n)$ 是关于自然数 n 的一个命题, $P(1)$ 成立, 且由 $P(k)$ 成立, 可推出 $P(k+1)$ 成立, 那么 $P(n)$ 对所有自然数 n 都成立.

- $P(n)$ 是关于自然数 n 的一个命题, 如果 $P(1)$ 成立, 且由 $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(k)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立, 那么 $P(n)$ 对所有自然数 n 都成立.

- $P(n)$ 是关于自然数 n 的命题，
$P(1)$、$P(2)$、…，$P(t)$ 成立，且由 $P(n)$ 成立
必可推出 $P(n+t)$ 成立，那么 $P(n)$ 对
所有自然数 n 都成立.

- $P(n)$ 是关于自然数 n 的一个命题，如果对无穷多个自然数 m 有 $P(m)$ 成立，且由 $P(n+1)$ 成立，必可推出 $P(n)$ 成立，那么 $P(n)$ 对
所有自然数 n 都成立.

这个有意思，不知道有没有例子。

- $P(n)$、$Q(n)$ 都是关于自然数 n 的命题.
$P(1)$ 成立，且由 $P(n)$ 成立可推出 $Q(n)$ 成立，
由 $Q(n)$ 成立可推出 $P(n+1)$ 成立. 那么 $P(n)$、
$Q(n)$ 对所有自然数 n 都成立.

$P(n) \longrightarrow Q(n) \longrightarrow P(n+1)$

看起来不像是能用到的，但正常确实想不到

- 数列有界性.

如果 $\exists M \in \mathbb{R}$，s.t. $\forall n \in \mathbb{N}^*$，有 $a_n < M$ （m，$> m$）

称 M（m）为数列 $\{a_n\}$ 的上界（下）

既有上界又有下界的数列称为有界数列.

数列不等式 $\begin{cases} \text{通项} \to \text{转化为数的不等式} \\ \text{递推} \to \text{简化不等式} \\ \quad\;\; \searrow \text{估计通项的大小.} \end{cases}$

- 数学归纳法.

猜想

例 151. 观察下列等式：

$1^2 = 1$

$1^2 - 2^2 = -3$

$1^2 - 2^2 + 3^2 = 6$

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = -10$

……

照此规律，第 n 个等式可为________.

$1 = 1$

$3 = 1+2$

$6 = 1+2+3$

$10 = 1+2+3+4$

解：$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1} n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$

例 152 用数学归纳法证明"$4^{2n-1} + 3^{n+1} (n \in N^*)$ 能被 13 整除"的第二步中，当 $n = k+1$ 时为了使用归纳假设，对 $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ 变形正确的是（ A ）

A. $16(4^{2k-1} + 3^{k+1}) - 13 \times 3^{k+1}$

B. $4 \times 4^{2k} + 9 \times 3^k$

C. $(4^{2k-1} + 3^{k+1}) + 15 \times 4^{2k-1} + 2 \times 3^{k+1}$

D. $3(4^{2k-1} + 3^{k+1}) - 13 \times 4^{2k-1}$

$n=k$ 时

$13 \mid (4^{2k-1} + 3^{k+1})$

解：$4^{2k+1} + 3^{k+2} = 4^2 \times 4^{2k-1} + 3 \times 3^{k+1}$

$= 16 \times 4^{2k-1} + 16 \times 3^{k+1} - 13 \times 3^{k+1}$

$= 16(4^{2k-1} + 3^{k+1}) - 13 \times 3^{k+1}$

例 153. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和为 S_n, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\frac{a_n + 2}{2} = \sqrt{2S_n}$, 用数学归纳法证明 $a_n = 4n - 2$.

解：当 $n=1$ 时，$\frac{a_1+2}{2} = \sqrt{2a_1}$，$(a_1+2)^2 = 8a_1$ $\therefore a_1 = 2 = 4\times1-2$

若命题在 $n=k$ 时成立，下面证明 $n=k+1$ 时也成立

$\frac{a_{k+1}+2}{2} = \sqrt{2S_{k+1}} = \sqrt{2S_k + 2a_{k+1}}$

$\therefore (a_{k+1}+2)^2 = 8\cancel{(4k-2)}^{2k^2} + 8a_{k+1}$

$a_{k+1}^2 - 4a_{k+1} + 4 \cancel{-32k+16}^{-16k^2} = 0$

$a_{k+1} - 2 = \cancel{\sqrt{32k-16} = 4\sqrt{2k-1}}$ $4k$

$a_{k+1} = 4(k+1) - 2$