Informal Notes on Mathematics

2022.08.10

时隔多日，终于来一点数学了。今天看不等式。

1、基本不等式

(1) 如果 $a, b \in \mathbb{R}$，那么 $a^2+b^2 \geq 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时取等

(2) $a, b, c \in \mathbb{R}$，那么 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等

2、AM-GM

如果 $a, b \in \mathbb{R}_+$，那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$，取等 iff $a=b$

类似的：$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$，

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

3. Cauthy，二维 & 三维

(1) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$，那么

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2)^2$$

取等 iff $a_1b_2 = a_2b_1$

(2) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$，那么

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

取等 iff $b_i=0$ $(i=1,2,3)$ 或 $\exists k \in \mathbb{R}$, s.t. $a_i = kb_i$

4、三角不等式

(1) 绝对值三角不等式

$a, b \in \mathbb{R}$，那么 $|a+b| \leq |a|+|b|$，取等 iff $ab \geq 0$

推论：

① $|a|-|b| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

② $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$，取等 iff $(a-b)(b-c) \geq 0$

实际所有 metric space 都满足三角不等式。这些情况是 trivial 的。

(2) 二维形式

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$，那么

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

例 1. 证明：

(1) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (2) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

其中 a, b, c, d 为正数

证明：先证明(2)。∵ a, b, c, d 均为正数

∴ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$

∴ $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$

当 $a=b$, $c=d$, $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$ 时，等号成立

∴ $a=b=c=d$ 时成立

应用(2)易证明(1)：

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{4} \geq \frac{3}{4}\sqrt[3]{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

也可以用和(2)相同的方法直接证明：

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} = \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}$$

其余同上。不等式(2)也可由(1)证明：唔，暂不详

例2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1+x_2+\cdots+x_n$$

证明：两边同时加上 $\sum_{i=1}^{n} x_i$：

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\right)+\left(\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\right)+\cdots+\left(\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\right) \mid 2x_1+2x_2+\cdots+2x_n$$

∵ $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_2} \geq 2x_1$, $\frac{x_2^2+x_3^2}{x_3} \geq 2x_2, \cdots$, $\frac{x_n^2+x_1^2}{x_1} \geq 2x_n$

∴ 易知原式成立

例3：设 a.b.c 为非负实数，满足 $a+b+c=1$，求证：

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

证明：∵ $a+b+c=1$ ∴ $1+a=(1-b)+(1-c)$

∵ $(1-b)+(1-c) \geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$

∴ $(1+a)(b+1)(1+c) \geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}\cdot 2\sqrt{(1-a)(1-c)}\cdot 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$

$= 8(1-a)(1-b)(1-c)$

例4：设 a.b.c 满足 $a>b^2$, $b>c^2$，求 $(a-b^2)(b-c^2)(c-a^2)$ 最大值

解：i $c-a^2 \leq 0$

∴ 原式 ≤ 0

ii $c-a^2>0$

由均值不等式：

$\therefore (a-b^2)(b-c^2)(c-a^2) \le \left(\frac{a-b^2+b-c^2+c-a^2}{3}\right)^3$

$= \left(\frac{(a-a^2)+(b-b^2)+(c-c^2)}{3}\right)^3$

$\because a-a^2 \le \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 原式 $\le \left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{3}\right)^3 = \frac{1}{64}$

例5：证明：对任意3个不全相等的非负实数a、b、c，有

$$\frac{(a-bc)^2+(b-ac)^2+(c-ab)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

并确定等号成立的充要条件.

证明：$\because a,b,c$ 不全相等

$\therefore$ 上式可化为：

$2(a-bc)^2+2(b-ac)^2+2(c-ab)^2 \geqslant (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$\therefore$ 可化为：

$ab+bc+ac+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2 \geqslant 6abc$

根据均值不等式：

$ab+bc+ac+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2$

$\geqslant 6\sqrt[6]{ab\cdot bc\cdot ac\cdot b^2c^2\cdot a^2c^2\cdot a^2b^2}$

$= 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6abc$

$\therefore$ 命题得证，

当且仅当 $ab=bc=ac=b^2c^2=a^2c^2=a^2b^2$ 时取等

$\because$ 三个数不全相等 $\therefore a.b.c$ 中有两个为0时取等

例6：已知a.b.c满足

$|a+b+c| \le 1,\quad |a-b+c| \le 1,\quad |a| \le 1$

求证：$|4a+2b+c| \le 7$

证明：$|4a+2b+c| = |3(a+b+c)+(a-b+c)-3c|$

$\le |3(a+b+c)|+|a-b+c|+|-3a|$

$\le 3+1+3$

$=7$

例7：设 $a\in(0,1)$，$b\in(0,1)$，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$$

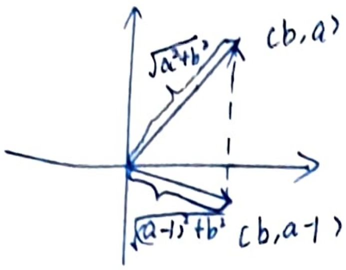
证明：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$

$\geqslant \sqrt{(a-a+1)^2+(b-b+1)^2}+\sqrt{(a+1-a)^2+(b-b+1)^2}$

$\geq 2\sqrt{2}$

关于为什么不用 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}$ 来取三角不等式，我个人认为是因为不可能取到等。实际这可以看成下图中的距离：

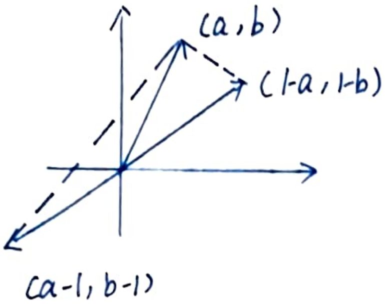


如图，如果按向量减法来写的话，就是

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

而其差正是三角不等式右端的部分。仅当三向量共线时才可能取等，但由图看这是显然不可能的。

关于为什么不用 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\cdots$ 而对其进行变形，我们也画图来看一下：



如图，令 $v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，$w=\begin{pmatrix} 1-a \\ 1-b \end{pmatrix}$，$u=\begin{pmatrix} a-1 \\ b-1 \end{pmatrix}$

可知 $|v-w|$ 始终小于等于 $|v|$ 和 $|w|$，

而 $|v-u|$ 始终大于 $|v|$ 和 $|u|$，小于等于 $|v|+|u|$

这是由于 v、w 之间夹角始终为锐角，v、u 之间始终是钝角造成的。由于限定了 a、b 的取值范围，这个形状就定下来了。如果没有限定那自然每种情况都有可能。因此我认为三角不等式还得用得非常谨慎，最好还是画图。或者说计算一下 $\cos\theta$，即 $\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$，只要判断 $a\cdot b$ 的正负性即可。为负即可用三角不等式求极值。

例8．设 $x,y,z\in[\frac{1}{2},2]$，a,b,c 是 x,y,z 的一个排列，证明：

$$\frac{60a^2-1}{4xy+5z}+\frac{60b^2-1}{4yz+5x}+\frac{60c^2-1}{4zx+5y}\geq 12$$

证明：解答过程似乎很 wenyao gec.

因为 $(x-2)(y-\frac{1}{2})\leq 0$，$\therefore xy-\frac{1}{2}x-2y+1\leq 0$

因为 $(y-2)(x-\frac{1}{2})\leq 0$，$\therefore xy-2x-\frac{1}{2}y+1\leq 0$

$\therefore$ 我们有 $4xy+5z\leq 5(x+y+z)-4$

$4yz+5x\leq 5(x+y+z)-4$

$4zx+5y\leq 5(x+y+z)-4$

$\therefore$ 问题转化为证明 $\frac{60(a^2+b^2+c^2)-3}{5(x+y+z)-4}\geq 12$

即 $(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z-1)^2\geq 0$

$\therefore$ 命题得证。