Informal Notes on Mathematics

2022.08.11

Тодай цзишуой лайкань буденши.

由于例9过分生草所以我们先做题

A1、 $x, y \in (-2,2)$, $xy=-1$, $\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}=\frac{12}{5}$，求 x 和 y

解：$\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2} \geq \frac{12}{\sqrt{(4-x^2)(9-y^2)}} = \frac{12}{\sqrt{37-9x^2-4y^2}} \geq \frac{12}{\sqrt{37-2\sqrt{36x^2y^2}}} = \frac{12}{5}$

∴ 仅当 $\frac{4}{4-x^2}=\frac{9}{9-y^2}$，$9x^2=4y^2$ 时取等

∴ $x^2=\frac{2}{3}$，$y^2=\frac{3}{2}$ ∴ $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{6}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

A2、 $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}_+$，$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$

求 $P<Q$ 的充要条件.

解：根据柯西不等式，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}} \geq \sqrt{ma}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}}+\sqrt{nc}\cdot\sqrt{\frac{d}{n}}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，仅当 $\sqrt{ma}\cdot\sqrt{\frac{d}{n}}=\sqrt{\frac{b}{m}}\cdot\sqrt{nc}$ 时取等

∴ 充要条件为 $\frac{mad}{n} \neq \frac{bnc}{m}$

A3. maximize $f(x)=2\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$

解：$f(x)=\sqrt{4x-12}+\sqrt{5-x}$，$3 \leq x \leq 5$

$f'(x)=\frac{4}{2\sqrt{4x-12}}+\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}=\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$

$=\frac{2\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}\sqrt{5-x}}=0$

∴ $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x-3}$，$20-4x=x-3$，$x=\frac{23}{5}$

∴ 最大值为 $2\sqrt{\frac{23}{5}-\frac{15}{5}}+\sqrt{5-\frac{23}{5}}=\sqrt{10}$

虽然它的本意肯定不是用微分，但乍一想没想出不等式

Щао，юйань лай ши Cauchy буденши 吗？

根据柯西不等式，

$(\sqrt{4(x-3)}+\sqrt{5-x})^2 \leq (4+1)(x-3+5-x)=10$

仅当 $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x-3}$ 时，两端取等，$x=\frac{23}{5} \in [3,5]$

∴ 最大为 $\sqrt{10}$

A4 $a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$，求 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$

解：$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=25\times36=30\times30=(ax+by+cz)^2$

∴ 根据柯西不等式取等条件，$a=kx$，$b=ky$，$c=kz$

∴ $k^2(x^2+y^2+z^2)=25$，$x^2+y^2+z=36$ ∴ $k=\frac{5}{6}$

∴ $\frac{a+b+c}{x+y+z}=k=\frac{5}{6}$

A5. A、B、C 为三角形三内角的弧度，证明：

$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq \frac{9}{\pi}$，$A^2+B^2+C^2 \geq \frac{\pi^2}{3}$

证明：$A+B+C=\pi$，$(A+B+C)(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C})\geqslant(1+1+1)^2=9$

$\therefore \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geqslant\frac{9}{\pi}$

又$\because (1+1+1)(A^2+B^2+C^2)\geqslant(A+B+C)^2=\pi^2$

$\therefore A^2+B^2+C^2\geqslant\frac{\pi^2}{3}$

A6. 求解方程组：$\begin{cases}(x-2)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-6)^2=64\\(x+2)^2+(y-\frac{3}{2})^2+(z+6)^2=25\end{cases}$

解：
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\frac{9}{4}\\ \boxed{\begin{matrix}3\times 64\geqslant(x+y+z-\frac{13}{2})^2\\3\times 25\geqslant(x+y+z+\frac{13}{2})^2\end{matrix}}\ \times\\-8x+6y-24z=39\end{cases}$$

根据柯西不等式，$-8x+6y-24z\leqslant\sqrt{64+36+576}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$=\sqrt{676}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\times 26=39$

$\therefore$根据取等条件，$\frac{x}{-8}=\frac{y}{6}=\frac{z}{-24}$，即$3x=-4y=z$

代入原方程组得，$\frac{169}{16}x^2=\frac{9}{4}$，$x=\pm\frac{6}{13}$ $\because -8x+6y-24z=39>0$

$\therefore x<0$ $\therefore x=-\frac{6}{13}$，$y=\frac{9}{26}$，$z=-\frac{18}{13}$

A7. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$，求证$abc\leqslant 1$

解：
$8=1+a+b+ab+c+ac+bc+abc$

$=1+(a+b+c)+ab+ac+bc+abc$

$\geqslant 1+3\sqrt[3]{abc}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc$

当$abc=1$时，上式等于8，随着abc增大，上式亦增大

$\therefore abc\leqslant 1$

A8. $x,y,z\in\mathbb{R}$，求证：$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{y^2+yz+z^2}$

证明：$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}$

$=\sqrt{(x+\frac{1}{2}y)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2}z)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2}$

$\geqslant\sqrt{(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2}$

$=\sqrt{y^2+yz+z^2}$

B9. 设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$，$abc=1$，证明：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

证明：$abc=1\iff\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=bc+ac+ab$

∵根据柯西不等式，有

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b))$$

$$\geq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\because ab+ac+ab+bc+ac+bc = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

B10. $x+y+z=0$，求证：$6(x^3+y^3+z^3)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)^3$

证明：i $x=y=z=0$

显然成立

ii x,y,z 不全为0，则3个数中至少一正一负，设 $xy<0$

$z=-(x+y)$

$$\therefore 6(x^3+y^3+z^3)^2 = 6(x^3+y^3-(x+y)^3)^2$$

$$= 6(-3x^2y-3xy^2)^2$$

$$= 54\left[xy(-x-y)\right]^2$$

$$= 54x^2y^2z^2$$

$$= 54|xy||xy|z^2$$

$$\leq 27\times\left(\frac{2|xy|+2z^2}{3}\right)^3$$

$$= (2z^2+2|xy|)^3$$

$$\because (x^2+y^2+z^2)^3 = (2z^2-2xy)^3 = (2z^2+2|xy|)^3$$

∴原命题成立。