l、直线公式汇总

1.斜率和倾斜角公式:

1）①若直线的倾斜角为α， 则$k=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$.

②若直线过点$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$两点. 则$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

2）①直线倾斜角的范围：$[0,\pi)$；

②当$k>0$时，$\alpha=\arctan k$；当$k<0$时$\alpha=\pi+\arctan k$

2.两条直线的平行和垂直

(1)若$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$

①$l_1//l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1\neq b_2$；

②$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2)若$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$,且A_1、A_2、B_1、B_2都不为零,

①$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$；

②$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

3.直线的五种方程

(1) 点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$（直线l过点$P_1(x_1,y_1)$，且斜率为k）.

(2) 斜截式 $y=kx+b$（b为直线l在y轴上的截距）.

(3) 两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$（$y_1\neq y_2$）（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$（$x_1\neq x_2$））.

(4) 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a$、$b$分别为直线的横、纵截距，$a$、$b\neq0$）

(5) 一般式 $Ax+By+C=0$(其中A、B不同时为0).

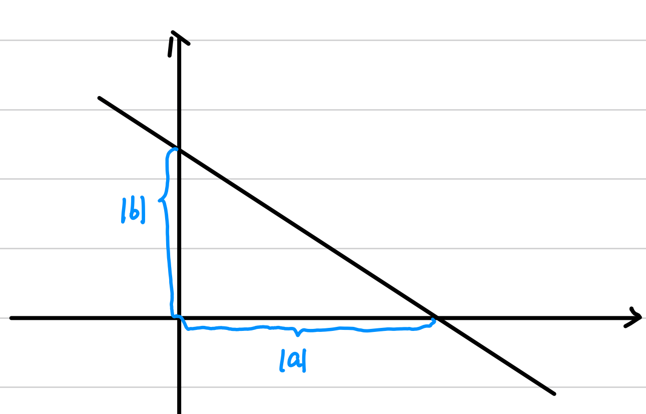
4.直线的方向向量和法向量:

设$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$是直线$l$:$Ax+By+C=0$上的不同两点，那么向量$\overrightarrow{P_1P_2}$以及与它平行的非零向量都称为直线$l$的方向向量，若$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标为$(x_2-x_1,y_2-y_1)$；特别当直线$l$与$x$轴不垂直时，即$x_2-x_1\neq0$，直线的斜率$k$存在时，那么$(1,k)$是它的一个方向向量；当直线$l$与$x$轴平行时，方向向量可为$(1,0)$；而无论斜率存在与否，其方向向量均可表示为（$-B$，$A$），法向量为（$A$，$B$）

5.直线的向量式方程:

1）点方向式方程：直线经过点$P(x_0,y_0)$，向量$\vec{d}=(u,v)$$(uv\neq0)$是直线的一个方向向量，那么直线的方程可以写成：$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$.

2）点法向式方程：直线经过点$P(x_0,y_0)$，向量$\vec{n}=(a,b)$是直线的一个法向量，那么直线的方程可以写成：$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.



6. 两条直线的夹角公式 ：（夹角的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$）

1） 设$l_1{:}y=k_1x+b_1$；$l_2{:}y=k_2x+b_2$，

①当$k_1k_2\neq-1$ 时，l_1与l_2的夹角为θ，则 $\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$；

②当$k_1k_2\neq-1$ 时，两直线的夹角为$\frac{\pi}{2}$.

2）取直线的方向向量分别为$\vec{d}=(-b_1,a_1),\vec{d_2}=(-b_2,a_2)$，则两直线的夹角为：

$\cos\theta=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$，因为$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，余弦函数在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是单调递减的，所以此时的$\alpha$是唯一确定的。

7.两点间的距离公式

1）若点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，即终点坐标－始点坐标；

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2）若$\vec{a}=(x,y)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

8.点到直线间的距离公式

点$P(x_0,y_0)$到$l{:}Ax+By+C=0$的距离为d，则$d=\frac{|Ax_0+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

9. 平行线间的距离公式

$l_1{:}Ax+By+C_1=0$与$l_2{:}Ax+By+C_2=0$ $(C_1\neq C_2)$的距离为d，则

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

10. 四种常用直线系方程

(1)定点直线系方程：经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$y-y_0=k(x-x_0)$(除直线$x=x_0$)，其中k是待定的系数； 经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$，其中A,B是待定的系数.

(2)共点直线系方程：经过两直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$的交点的直线系方程为$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$(除$l_2$)，其中$\lambda$是待定的系数.

(3)平行直线系方程：直线$y=kx+b$中当斜率k一定而b变动时，表示平行直线系方程．与直线$Ax+By+C=0$平行的直线系方程是$Ax+By+\lambda=0$（$\lambda\neq0$），λ是参变量.

(4)垂直直线系方程：与直线$Ax+By+C=0$ ($A\neq0$，$B\neq0$)垂直的直线系方程是$Bx-Ay+\lambda=0$，λ是参变量.

2、圆的方程

定义

圆心为$C(a,b)$，半径为r的圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

圆的一般方程：

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

公式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

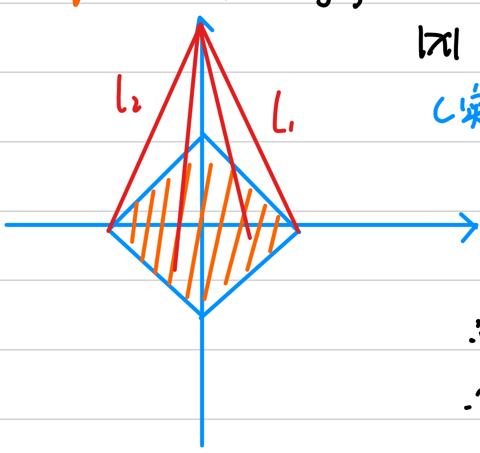
$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}>0$$

若$\frac{D^2+E^2-F}{4}<0$，则为虚圆

例 300. 当 x,y 满足条件 $|x|+|y|\leqslant 1$ 时, 变量 $\mu=\dfrac{x}{y-3}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

解：∵ $\mu=\frac{x}{y-3}$ ∴ $\frac{1}{\mu}=\frac{y-3}{x}=k_l$，其中 l 过 $(0,3)$



$|x|+|y|\le 1$ 相当于右图中的正方形区域

（实际上也是以曼哈顿距离为距离的度量空间的一个半径为1的闭球 B_1）

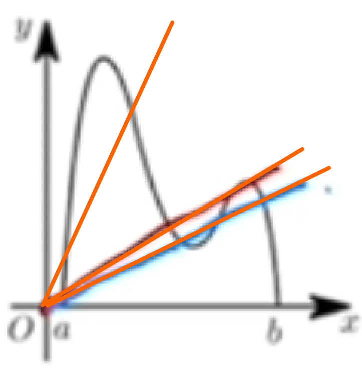
如图，$k>0$ 时，斜率最小为 l_2 时，$k\in[3,+\infty)$

$k<0$ 时，斜率最大为 l_1 时，$k\in(-\infty,-3]$

∴ $\frac{1}{k}\in[-\frac{1}{3},0)\cup(0,\frac{1}{3}]$ 又∵ $\frac{1}{k}=0$ 时亦成立（即 $x=0$）

∴ $\frac{1}{k}\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

例 301. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geqslant 2)$ 个不同的数 x_1,x_2,x_3,x_n，使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围是 $\{2,3,4\}$.



$\frac{f(x_n)}{x_n}$ 即表示 $(x_n,f(x_n))$ 与 O 连线斜率

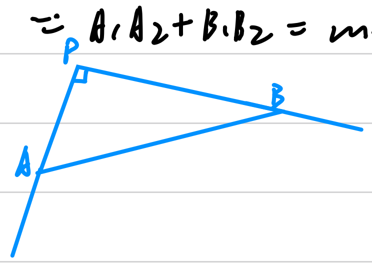
∴由图可知，有 2，3，4 个

例 304. 设 $m\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $x+my+3=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+6=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是________.

解：$x+my+3=0$ 恒过 $(-3,0)$，$mx-y-m+6=m(x-1)-y+6=0$，恒过 $(1,6)$

∴ $A(-3,0)$，$B(1,6)$

∵ $A_1A_2+B_1B_2=m-m=0$ ∴两线垂直

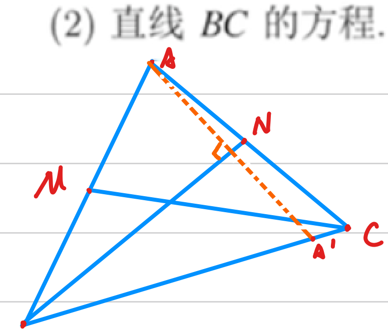


$|PA|\cdot|PB|\le\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=\frac{|AB|^2}{2}=26$

例 305. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5,1)$，AB 边上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$，$\angle B$ 的平分线 BN 所在直线方程为 $x-2y-5=0$. 求:

(1) 顶点 B 的坐标.

(2) 直线 BC 的方程.



解：设 $M(x_0,y_0)$ ∴ $2x_0-y_0-5=0$，$B(2x_0-5,2y_0-1)$

∴ $2x_0-5-2(2y_0-1)=5$ ∴ $y_0-4y_0=3$，$y_0=-1$

∴ $x_0=2$ ∴ $B(2,-1)$

(2) 作 A 关于 BN 的对称点，设 A' 为 (m,n)

∴ $\frac{m-5}{n-1}=-2$，$\frac{m+5}{2}-2\frac{n+1}{2}-5=0$

$\therefore A'(\frac{26}{5}, \frac{8}{5})$ 又 $B(2,-1)$

$\therefore BC: \frac{x-2}{\frac{16}{5}} = \frac{y+1}{\frac{8}{5}}$

$\therefore 2y+2 = x-2$, $y = \frac{1}{2}x - 2$

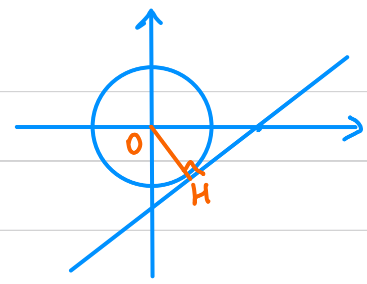
例 307. 在平面直角坐标系中, 记 d 为点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 到直线 $x - my - 2 = 0$ 的距离. 当 θ, m 变化时, d 的最大值为________.

解: P 在 $x^2+y^2=1$ 上

$\therefore d_{max}$

$= (OH + r)_{max}$

$= \sqrt{2}+1$



例 308. 方程 $|y| = 1 + \sqrt{2x - x^2}$ 表示的曲线是

A. 一个圆

B. 两个半圆

C. 一个椭圆

D. 以上结论都不对

解: 当 $y>0$ 时, $y-1 = \sqrt{2x-x^2}$, $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 1$

当 $y<0$ 时, $-(y+1) = \sqrt{2x-x^2}$, $(y+1)^2 + (x-1)^2 = 1$

$\therefore$ 两个半圆。

直线与圆 2.

1. 直线与圆的位置关系.

(1) 几何法. (各个圆情况).

d: 圆心到直线距离

$d>r$ 相离

$d=r$ 相切

$d<r$ 相交.

(2) 代数法

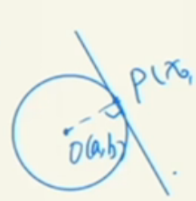
$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \end{cases}$

$\Delta<0$ 相离

$\Delta=0$ 相切

$\Delta>0$ 相交.

2. 公式.



$P(x_0, y_0)$. $(y_0-b)(y-y_0)+(x_0-a)(x-x_0)=0$

$k_{切线} \cdot k_{OP} = -1 \Rightarrow k_{切} = \frac{-1}{\frac{y_0-b}{x_0-a}}$.

3. 圆与圆的位置关系.