INFORMAL NOTES ON MATHEMATICS

2022.09.13

数论 $\Longrightarrow$ 系统 (知识体系)

条件/信息 $\Longrightarrow$ 不稳定. (不充分必要/隐藏性好) 尝试的可能性.

(与几何不同)

有素数p满足 $p = x(x+1)-4$ $x \in N_+$ 求p

p为质数 x^2+x-4

$x \in N_+$ $2 \mid x(x+1)$ $\therefore 2 \mid x(x+1)-4$

$\therefore 2 \mid p$ $\therefore p=2.$ $\therefore x=2.$

1 整除

定义. 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, 如果存在 $q \in \mathbb{Z}$ 使得 $b = aq$, 那么我们称 b 可被 a 整除, 记作 $a \mid b$, 且称 b 是 a 的倍数, a 是 b 的约数.

大多数情况下我们不这样处理问题，而是用以下定理

$a \mid b \Longleftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ 使 $b = aq$.

定理.

1. $a \mid b \Leftrightarrow -a \mid b \Leftrightarrow a \mid -b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$.
2. $a \mid b$ 且 $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.
3. $a \mid b$ 且 $a \mid c \Leftrightarrow$ 对任意 $x, y \in \mathbb{Z}$ 都有 $a \mid bx + cy$.
4. 设 $m \neq 0$, 那么 $a \mid b \Leftrightarrow ma \mid mb$.
5. $a \mid b$ 且 $b \mid a$, 那么 $b = \pm a$.
6. 设 $b \neq 0$, 那么 $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$.

整除相关性质

$a \mid b \Rightarrow b=0$ 或 $|b| \geq |a|$ 要尽量让其比较难成立，|b|尽可能小，|a|尽可能大

$a \mid b$

处理困难 处理容易

$a \mid b \Rightarrow a \mid b,\ a \mid a \Rightarrow a \mid bx+ay$ → 让其相对a比较小

$\Rightarrow bx+ay=0$ 或 $|bx+ay| \leq |a|$

例：$x\in\mathbb{Z}_+$，$x^2+1\mid x^3-x$

解：$x^3-x=0$ 或 $x^2+1\le x^3-x$ 对于比较大的 x 恒成立

∴ 尝试把 x^3-x 减小，降次

∵ $x^2+1\mid x^3-x$，$x^2+1\mid x^2+1$

∴ $x^2+1\mid x^3-x-(x^2+1)x$，即 $x^2+1\mid -2x$

∴ $x^2+1\le|-2x|=2x$ 或 $2x=0$

∴ $x=1$ 或 0

例2：$x^2+x+1\mid x^4-2$

解：同样先降次。

$x^2+x+1\mid x^4-2$，$x^2+x+1\mid x^2+x+1$

∴ $x^2+x+1\mid x^4-2-x^4-x^3-x^2 \Rightarrow x^3+x^2+2$

∴ $x^2+x+1\mid x^3+x^2+2-x^3-x^2-x \Rightarrow x-2$

∴ $x^2+x+1\mid x-2$

∴ $x-2=0$ 或 $|x-2|\geqslant x^2+x+1$ $\Rightarrow$ 一定是区间，因为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$x^2+x+1>|x-2|$

$(x\geqslant 2)$ $\quad$ $(x<2)$

$x-2\geqslant x^2+x+1$ $\quad$ $x^2+x+1\le 2-x$

$x^2\le -3$ $\quad$ $x^2+2x-1<0$

$-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$

代回验算 $\Leftarrow$ ∴ $x=0,-1,-2$

∴ $x=0,-1$

② 利用整除条件（略

（整除 $\Rightarrow$ 等式/不等式 处理问题）

整除 $\xRightarrow{\text{变形}}$ 更强的等式 或不等式 $\quad$ $a\mid b \Rightarrow$ 14个，$|b|\geqslant|a|$

$a\mid b$

$\downarrow$ 积性

积/和.

整除 $\begin{cases}\text{证明整除.}\\ \text{利用整除条件处理问题}\end{cases}$

① 证明整除

直接证明整除式

（简单/凑起）

$S=y_1+\cdots+y_k$ 若 $x\mid y_i$ $1\le i\le k$

∴ $x\mid S$

归纳

题. 证明：$1^{1983}+2^{1983}+\cdots+1983^{1983}$ 能够被 $1+2+\cdots+1983$ 整除.

解：① $1+2+\cdots+1983=\frac{1984\times1983}{2}=992\times1983$

只需证 $992 \mid 1^{1983}+2^{1983}+\cdots+1983^{1983}=S$

$1983 \mid S$

从S中找项 → 992 or 1983 的倍数

$x+y \mid x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}+\cdots\cdots+y^{n-1})$

$\therefore 1984 \mid 1^{1983}+1983^{1983}$ 以此类推配对

又 $\because 1984 \mid 992^{1983}$

$\therefore 1984 \mid S$

$\because 1983 \mid 1983^{1983}$，$1983 \mid k^{1983}+(1983-k)^{1983}$，以此类推配对

$\therefore 1983 \mid S$

$\therefore 1984\times1983 \mid S$ $\quad\therefore$ 原命题得证