二.伯努利不等式

2.1若实数 $x_i(i=1,2,\ldots n)$各项符号相同，且 $x_i>-1$，则:

$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$ **(2)**

（2）式为伯努利不等式。

当 $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$ 时，（2）式变为:
$(1+x)^n \geq 1+nx$ **(3)**

还有推论形式为 $y>x>0$ 时，$(1+x)^y \geq (1+y)^x$

三.幂均不等式

3.1设 $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 为正实数序列，实数 $r\neq 0$,则记:

$M_r(a)=(\frac{a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r}{n})^{\frac{1}{r}}$ **(4)**

(4)式的 $M_r(a)$ 称为幂平均函数。

3.2若 $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 为正实数序列，且实数 $r\neq 0$,则:

$M_r(a)\leq M_s(a)$ **(5)**

当 $r\leq s$ 时，（5）式对任何r都成立，即 $M_r(a)$ 关于r是单调递增函数.

（5）式称为幂平均不等式，简称幂均不等式.

四.柯西不等式

4.1若 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 和h $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 均为实数，则:

$(a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$
$\geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$
(8)

4.3推论1：若 a, b, c, x, y, z 为实数， $x, y, z \geq 0$,则:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \quad \textbf{(11)}$$

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$\geq\left(\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2}\right)^2$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立。

（11）式是柯西不等式的推论，称权方和不等式。

4.4推论2：若 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 均为实数，则:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}$$

（12） 当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立。

4.5推论3：若 a, b, c, x, y, z w为正实数，则:

$$\frac{x}{y+z}(a+b)+\frac{y}{z+x}(c+a)+\frac{z}{x+y}(a+b)$$
$$\geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

五.切比雪夫不等式

5.1若 $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$,，且均为实数。
则:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$
$$\leq n(a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)$$

(14)

当 $a_1=a_2=\ldots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\ldots=b_n$ 时，等号成立

(14)式为切比雪夫不等式

可表示为此形式

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right) \leq \frac{(a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)}{n}$$

七.琴声不等式

7.1定义凸函数：对一切 $x, y \in [a, b]$, $\alpha \in [0, 1]$,若函数 $f : [a, b] \to R$ 是向下的

凸函数，则： $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \le f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ **(20)**

(20)式是向下凸函数的定义式.

注： $f : [a, b] \to R$ 表示区间 $[a, b]$ 和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间都是实数。

7.2若 $f : (a, b) \to R$ 对任意 $x \in (a, b)$ ，存在二次导数 $f''(x) \ge 0$,则 $f(x)$ 在

(a, b) 区间为向下凸函数：当 $x \in (a, b)$ 时，若 $f''(x) > 0$,则 $f(x)$ 在 (a, b)

区间为严格的向下凸函数。

7.4若 $f : (a, b) \to R$是一个在 (a, b) 区间的向下凸函数，设 $n \in N$ ，

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0, 1)$ 为实数，且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ 对任何 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ ，有：

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \\ \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$
(21)

(21)式就是加权的琴声不等式

简称：“对于向下凸函数，均值的函数值不大于 函数的均值”。

十.赫尔德不等式

10.1若实数 $a, b > 0$,实数 $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则:

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ **(27)**

当 $a^p = b^q$ 时，等号成立。（27）式称为**杨氏不等式**

10.2若 $a_1, a_2, ..., a_n$ 和 b_1， $b_2, ..., b_n$ 为正实数， $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$
$$\leq (a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$
（28）

（28）式称为**赫尔德不等式。**

当 $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q}$ 时等号成立。

十一.闵科夫斯基不等式

11.1若 $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ 为正实数，且 $p > 1$,则:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ **(34)**

当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立。 （34）式称为**第一闵科夫斯基不等式。**

11.2若 $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ 为正实数，且 $p > 1$,则:

$$\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n (a_i^p + b_i^p)^{\frac{1}{p}}$$ **(35)**

当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立。 （35）式称为**第二闵科夫斯基不等式**。