Informal Notes on Mathematics

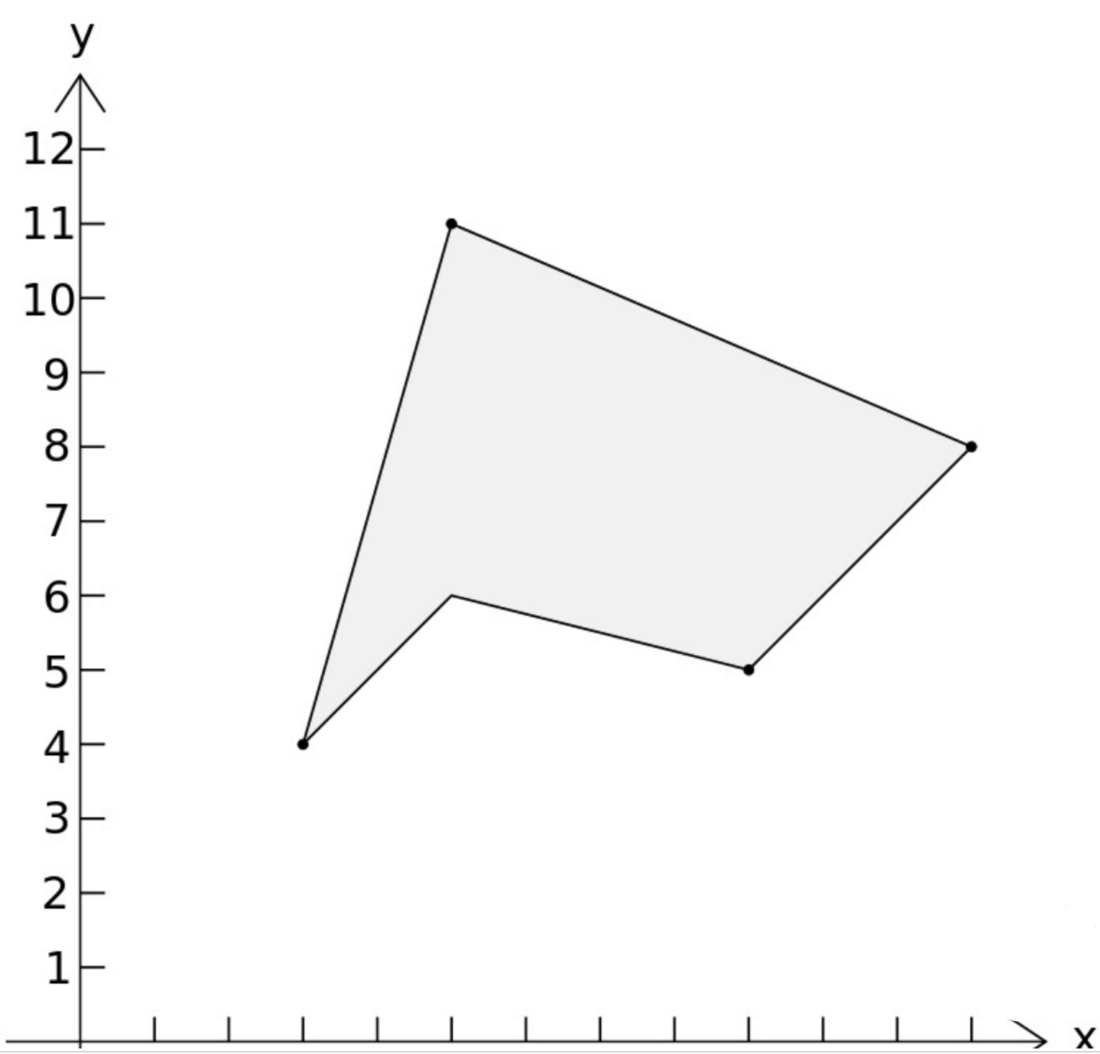
2022.10.13

对于任意一个多边形，如果已知其各个顶点的坐标 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),...,A_n(x_n,y_n)$，那么这个多边形的面积为：

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\right|,$$

其中 $x_{n+1}=x_1, y_{n+1}=y_1$。

例： $A_1(3,4),A_2(5,11),A_3(12,8),A_4(9,5),A_5(5,6)$



解： $S=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\right|$

$=\frac{1}{2}(3\times11-5\times4+5\times8-11\times12+12\times5-8\times9+9\times6-5\times5+5\times4-3\times6)$

$=\frac{1}{2}(33-20+40-22+60-72+54-25+20-18)$

$=\frac{1}{2}\times60=30$

【试题】

> 满足 $x^2+y^2=2x-4y$ 的方程上有三点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$，请问 $x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2$ 的最大值是多少?

解：$\because x^2+y^2=2x-4y$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=5$

$\therefore$ 三点在圆上

$\therefore x_1y_2-x_2y_1$

$=\overrightarrow{(x_1,y_1)}\cdot\overrightarrow{(y_2,-x_2)}$

$=\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OA'}$

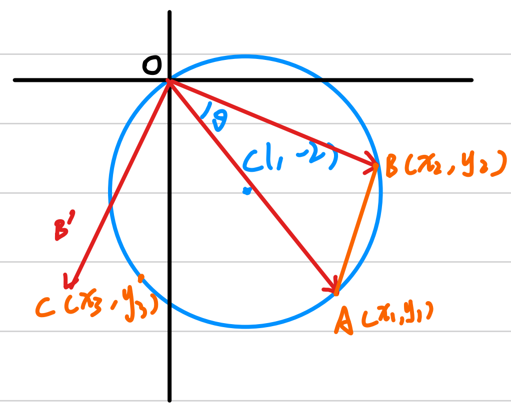
$=|\overrightarrow{OB'}|\cdot|\overrightarrow{OA'}|\cdot\cos(90-\theta)$

$=|\overrightarrow{OB'}|\cdot|\overrightarrow{OA'}|\cdot\sin\theta \quad =2S_{\triangle OAB}$

同理，$x_2y_3-x_3y_2=2S_{\triangle OBC}$

但是，这里的面积是有向面积（因此不能直接找2个最大△面积相加）

$\therefore$ 原式 $=2S_{四OBAC}$ $\quad\therefore$ 原式 $max=2\times(\sqrt{10})^2=20$



然后是一点数论。

Remainder Theorem

If a polynomial $p(x)$ is divided by a linear factor $x-c$, then the remainder is $p(c)$.

下面给出证明：

一个多项式 $p(x)$ 除以 $d(x)$ 一定能表示成：

$$p(x)=d(x)\times q(x)+r(x)$$

其中，$q(x)$ 为商，$r(x)$ 为余数。

记Deg(p(x))为多项式p(x)的度，即p(x)的最高次。

那么一定有Deg(d(x))＞Deg(r(x))。因为如果Deg(r(x))≥Deg(d(x))，那么说明还可以继续除，直到Deg(d(x))＞Deg(r(x))。（类比，$13\div4=3\cdots1, 4>1$。）

那么如果除数d(x)=x-c是一个一次函数，那么r(x)的次数必定为0，即r(x)是一个常数。

所以

$$p(x)=(x-c)q(x)+r,$$

那么，把x=c带入上式中，

$$r=p(c).$$

1999-AHSME-17

Let $P(x)$ be a polynomial such that when $P(x)$ is divided by $x-19$, the remainder is 99, and when $P(x)$ is divided by $x-99$, the remainder is 19. What is the remainder when $P(x)$ is divided by $(x-19)(x-99)$.

解：设 $P(x)=(x-19)(x-99)Q(x)+ax+b$

$\therefore \begin{cases} 99=P(19)=19a+b \\ 19=P(99)=99a+b \end{cases}$

$\therefore$ $a=-1$，$b=118$

$\therefore$ 余项为 $-x+118$

同余

给定一个正整数m，如果两个整数a,b满足$a-b$能被m整除，即$m|(a-b)$，则称a与b对模m同余，记作$a\equiv b(mod\ m)$.

For any integer n, n^2 mod 3 or 4 can only be 0 or 1.
For any integer n, n^2 mod 8 can only be 0 or 1 or 4.
For any positive integer n, $n\equiv$ sum of the digits of n mod 9.

（3）**命题：对任意整数 n，n 与 n 各数位上的数字之和除以9同余。**

> 证明：
> 设
> $n=\overline{x_1x_2\dots x_n}, x_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, x_1\neq 0$
> $n=x_1\times 10^{n-1}+x_2\times 10^{n-2}+\cdots+x_n\times 10^0$
> $n=x_1\times(9\dots9+1)+x_2\times(9\dots9+1)+\cdots$
> $+x_{n-1}\times(9+1)+x_n$
> $n\equiv x_1+x_2+\cdots+x_n\ (mod\ 9)$
> 得证。

1. 反身性：$a\equiv a(mod\ m)$
2. 对称性：若$a\equiv b(mod\ m)$,则$b\equiv a(mod\ m)$
3. 传递性：若$a\equiv b(mod\ m)$，$b\equiv c(mod\ m)$，则$a\equiv c(mod\ m)$
4. 同余式相加：若$a\equiv b(mod\ m)$，$c\equiv d(mod\ m)$，则$a\pm c\equiv b\pm d(mod\ m)$
5. 同余式相乘：若$a\equiv b(mod\ m)$，$c\equiv d(mod\ m)$，则$ac\equiv bd(mod\ m)$
6. 推论，$a^k\equiv b^k\ (mod\ m)$

1999 AMC8 24

When 1999^{2000} is divided by 5, the remainder is

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

解：$\because 1999 \equiv -1 \bmod 5$

$\therefore 1999^{2000} = (-1)^{2000} \bmod 5 = 1 \bmod 5$

欧拉定理(Format-Euler 定理)

设$(a, m) = 1$，则有

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\, m).$$

特别的当p为素数时，对任意的a有

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\, p).$$

欧拉函数

对于一个正整数n，小于n且和n互质的正整数(包括1)的个数，记作$\varphi(n)$.

$\varphi(n)$计算：

设 $n = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$,

则 $\varphi(n) = (a_1^{k_1} - a_1^{k_1-1})(a_2^{k_2} - a_2^{k_2-1}) \cdots (a_n^{k_n} - a_n^{k_n-1})$

1972 AHSME 31

The number 2^{1000} is divided by 13. What is the remainder?

解：$\varphi(13) = 13-1 = 12$ $\quad \therefore 2^{12} \equiv 1 \bmod 13$

$\therefore 2^{1000} = 2^{12\times 84} \times 2^4 \equiv 2^4 \bmod 13 \equiv 3 \bmod 13$