Informal Notes on Mathematics

2022.11.05

Цугой-лэчжон лэянд нойаньинь. шузин хеньщуэю мешю кан матхематикс. Сад малодоотш

精做看点杂乱的问题。(《奥赛教程》)

1. P50 例1. 已知 $f(x)=x+g(x)$, $g(x)$ 定义在 R 上，最小正周期为2. 若 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 最大为1，求 f 在 $[10,12]$ 上最大值

解: $f(x+2)=x+2+g(x+2)=g(x)+x+2=f(x)+2$

$\therefore f(x+8)=f(x)+8$

$\because f(x)$ 在 $[2,4]$ 上最大为1 $\therefore f(x)$ 在 $[10,12]$ 上最大为9

2. P50 例2. 设 x 为正实数，求函数 $y=x^2+x+\frac{3}{x}$ 的最小值

解: $y=x^2+x+\frac{3}{x}$

$=(x-1)^2+3x+\frac{3}{x}$

$=(x-1)^2+3(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2+6-1$

≥ 5, iff $x=1$ 时取等

$\therefore$ 最小为5

3. P50 例4. $f(x)=\log_2(x+1)$，当 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上移动时，点 $(\frac{x}{3},\frac{y}{2})$ 在 $y=g(x)$ 上运动，求 $p(x)=g(x)-f(x)$ 的最大值

解: $\frac{y}{2}=g(\frac{x}{3})$

$\therefore g(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}\log_2(x+1)$ $\therefore g(x)=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)$

$\therefore p(x)=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)-\log_2(x+1)$

$=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)-\frac{1}{2}\log_2(x+1)^2$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{3x+1}{(x+1)^2}$

$\because \frac{(x+1)^2}{3x+1}=\frac{x^2+2x+1}{3x+1}=\frac{\frac{1}{9}(3x+1)^2+\frac{4}{9}(3x+1)+\frac{4}{9}}{3x+1}=\frac{1}{9}(3x+1)+\frac{4}{9(3x+1)}+\frac{4}{9}$

$\geq\frac{8}{9}$, iff $3x+1=2$

$\therefore \frac{3x+1}{(x+1)^2}\leq\cancel{\frac{8}{9}}\ \frac{9}{8}$ $\therefore p(x)$ 最大为 $\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{8}=\log_2 3-3$

4. P50 例5. 设 $p,q\in R$，在 xOy 平面中，函数 $f(x)=x^3+px^2+(p+q)x+q+1$ 的图象关于 $(1,0)$ 对称，求 $g(x)=f(x)-x^3-px-q$ 的最大值

解: $\because f(x)$ 为三次函数 $\therefore f(x)$ 过 $(1,0)$

$\therefore 1+p+p+q+q+1=0$

又 $\because f(-1)=-1+p-p-q+q+1=0$

$\therefore f(2)=0$ $\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

$\therefore p=-2, q=1$

$\therefore g(x)=x^3-2x^2-x+2-x^3+2x-1=-2x^2+x+1\leq\frac{9}{8}$

$\therefore$ 最大为 $\frac{9}{8}$

5. P15. 9. 设 $a, b, c \in R^+$, $abc=1$, 证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

证明: 注意 $abc=1 \Leftrightarrow ac+bc+ab = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$$\therefore \left(\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b))$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\therefore \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{3}{2}$$