Informal Notes on Mathematics

2022.11.07

本来想看向量的，但图似乎有点难画，等再到时候用 Evan Chen 的 EGMO 看吧。

1、正余弦函数的有界性

$$|\sin\alpha| \le 1, \quad |\cos\alpha| \le 1, \quad 1 \pm \sin\alpha \ge 0, \quad |A\sin\alpha + B\cos\alpha| \le \sqrt{A^2+B^2}$$

2、奇偶性与对称性

$\sin x$，$\tan x$，$\cot x$ 都为奇，关于原点对称，

$\cos x$ 为偶，关于 y 轴对称，

此外，$\cos x$ 还关于 $x = k\pi$ 对称，$\sin x$ 关于 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 对称

3、单调性

$\sin x$ 在 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 上递增，在 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3}{2}\pi]$ 上递减

$\cos x$ 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 上递增，在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 上递减

4. 周期性

一般地，对于 $y = f(x)$，如果存在一个正常数 T，使得对定义域内的任意实数 x，$x+T$ 也在定义域内，且 $f(x+T) = f(x)$，那么称 f 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期。

例 1. 设 $a\ (a>0)$，b 为常数，函数 $y = a\sin x + b$ 最大值为 4，最小为 2，求 a、b 的值

解：$\because a > 0$，$\max(\sin x) = 1$，$\min(\sin x) = -1$

$$\therefore \begin{cases} a + b = 4 \\ -a + b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

例 2. 求 $y = \dfrac{\sin 2x - 3}{\sin x + \cos x - 2}$ 的值域

解：$$y = \frac{2\cos x \sin x - 3}{\sin x + \cos x - 2} = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 4}{\sin x + \cos x - 2} = \cos x + \sin x + 2$$

$$\because |\cos x + \sin x| \le \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} \le y \le 2 + \sqrt{2}$$

例 3. 设 a、x、y 都是实数，$x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$，满足

$$x^3 + \sin x = 2a, \quad 4y^3 + \sin y \cos y = -a$$

求 $\cos(x + 2y)$ 的值

解：条件可变形为 $x^3 + \sin x = 2a$，$(2y)^3 + \sin 2y = -2a$

令 $f(x) = x^3 + \sin x$

$\because y = x^3$，$y = \sin x$ 均为奇 $\therefore f(x)$ 也为奇

$\therefore -f(x) = f(-x)$

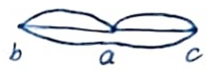
$\because 2y = -x \quad \therefore 2y + x = 0 \quad \therefore \cos(2y+x) = \cos 0 = 1$

例4. 设$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，满足

$$|f(x)+\cos^2 x| \le \frac{3}{4}, \quad |f(x)-\sin^2 x| \le \frac{1}{4},$$

求$f(x)$的解析式。

解：$\because |a-b| + |a-c| \ge |b-c|$



$\therefore 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \le |f(x)+\cos^2 x| + |f(x)-\sin^2 x| \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\therefore |f(x)+\cos^2 x| = \frac{3}{4}, \quad |f(x)-\sin^2 x| = \frac{1}{4}$

$\therefore \begin{cases} f(x)+\cos^2 x = \frac{3}{4} \\ \sin^2 x - f(x) = \frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)+\cos^2 x = -\frac{3}{4} \\ f(x) - \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{cases}$（舍）

$\therefore f(x) = \frac{3}{4} - \cos^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}$

例5. 已知圆 $x^2+y^2=k^2$ 至少覆盖函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$ 的一个最大值点和最小值点，求k的取值范围。

解：$\because f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$ 为奇 $\quad \therefore$ 图像关于原点对称

$\therefore$ 如圆包含其一个最值点，则一定包含另一个

$\because -1 \le \sin x \le 1 \quad \therefore -\sqrt{3} \le f(x) \le \sqrt{3}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{k}x = 1 \quad \therefore \frac{x}{k}\pi = 2m\pi + \frac{1}{2}\pi, \ m \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = 2mk + \frac{1}{2}k, \ m \in \mathbb{Z}$ $\quad \therefore$ 至少覆盖一个

$\therefore$ 只要覆盖最近的即可 $\quad \therefore x = \frac{k}{2}$

$\therefore \left(\frac{k}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 \le k^2$

$\therefore \cancel{-2 \le k \le 2}$ $k \ge 2$ 或 $k \le -2$

例6. 已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x - \cos^2\omega x \ (\omega>0)$ 的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，在$\triangle ABC$中，若$\angle A, \angle B, \angle C$所对的边 a, b, c 满足$b^2=ac$，求$f(B)$取值范围。

解：先把$f(x)$化成周期函数的形式：

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x - \frac{1}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\omega x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\omega x - \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$$

$\because$ 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$