讲义(1)

2022 年 12 月 3 日

1 集合

1.1 预备知识和符号

设 $m \leq n$ 都是整数，则我们有求和符号：$\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$，乘积符号：$\prod\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m * a_{m+1} * a_{m+2} * \cdots * a_n$。我们可以叠加使用这些符号，比如

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} a_k = a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

定理 1.1.1. 德 · 摩根定律：$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$, $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$。

证明. 只验证第一个。

如果 $x \in \overline{A \bigcup B}$, 则 $x \notin A \bigcup B$, 所以 $x \notin A$ 且 $x \notin B$。于是 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$，从而 $x \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$。

相反，如果 $x \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$，则 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$，从而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$，于是 $x \notin A \bigcup B$，所以 $x \in \overline{A \bigcup B}$。 □

请尝试证明上面的第二个等式。

证明
$(\Rightarrow)$: $x \in \overline{A \cap B}$
$\Rightarrow x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B$
$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$
$\Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
$(\Leftarrow)$ $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$
$\Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B$
$\Rightarrow x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$

定理 1.1.2. 容斥原理：如果 A 与 B 都是有限集，则

(1) $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$;

(2) $|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| + |C| - |A \bigcap B| - |B \bigcap C| - |A \bigcap C| + |A \bigcap B \bigcap C|$。

证明.

(1) 显然。

(2) 由 (1)，我们有

$$
\begin{aligned}
|A\bigcup B\bigcup C| =&|A| + |B\bigcup C| - |A\bigcap(B\bigcup C)| \\
=&|A| + |B| + |C| - |B\bigcap C| - |(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)| \\
=&|A| + |B| + |C| - |B\bigcap C| - \Big(|A\bigcap B| + |A\bigcap C| \\
&- |(A\bigcap B)\bigcap(A\bigcap C)|\Big) \\
=&|A| + |B| + |C| - |B\bigcap C| - |A\bigcap B| - |A\bigcap C| \\
&+ |A\bigcap B\bigcap C|
\end{aligned}
$$

$A \cap (B \cup C)$
$= (A\cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C)$
$= (A\cup B) \cap (A \cap C)$

□

显然容斥原理可以有更高阶的版本，证明是冗长的归纳法，但是却是平淡的。请尝试将容斥原理推广到 4 个集合的情况，你当然可以推广到 n 个集合的情形，请用归纳法证明你的结论。

下面鸽巢原理或者叫做抽屉原理是初等数论中常用的工具，证明是十分容易的。

定理 1.1.3. *鸽巢原理 (抽屉原理) 将 $n+1$ 个球放入 n 个盒子里面，则一定有一个盒子被放入了两个或者两个以上的球。*

接下来，我们描述组合数学中的一些预备知识，同学们可以在学习排列组合的时候再来了解，但是我们仍然建议现在就能理解这些组合数学中常用工具。

定理 1.1.4. *加法原理 完成一件事情有 n 种方式，第 k 种方式有 m_k 种方法，$k = 1, 2, \cdots, n$，则完成这件事情总共有 $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ 方法。*

加法原理很容易理解，想象一下你自己从家出发到学校，如果从家到学校有 3 条不同的路可以直达，每条路有不同的交通工具，比如第一条路有 2 种交通工具，第二条有 1 种，第三条有 2 种，则从家到学校共有 $2+1+2=5$ 种方法。注意加法原理是并行的。

定理 1.1.5. *乘法原理 完成一件事情分为 n 个步骤，第 k 种步骤有 m_k 种方法，$k = 1, 2, \cdots, n$，则完成这件事情总共有 $\prod\limits_{k=1}^{n} m_k$ 方法。*

乘法原理是串行的。

我们来描述组合数和排列数。

选取 n 个不同的球进行不放回排序 (就是说每个球最多只能选取一次)，一共有多少种方法? 我们可以用乘法原理来建立模型: 完成这件事可以分为 n 个步骤，每个步骤就是每次选取一个球，所以第一个步骤有 n 种方法。由于第一个步骤里已经选定一个球，所以第二个步骤里面我们有 $n-1$ 种方法，继续进行下去，我们得到共有 $n! := n*(n-1)*(n-2)*\cdots*2*1$ 种方法，我们把这个数叫做全排列，用 A_n^n 表示。如果我们只想选出 m 个球出来进行排列，其中 $m \leq n$，则显然有 $n*(n-1)*\cdots*(n-m+1)$ 种方法，我们用 A_n^m 表示它。

如果我们只想从 n 个不同的球中选取 m 个球 (不放回)，则有多少种方法? 事实上从 n 个球选出 m 个球出来进行排列，这件事可以分为两步，第一步从 n 个不同的球中选取 m 个球，第二步对这 m 个球进行不放回排列。所以根据乘法原理，第一步的所有方法的个数乘以 $A_m^m = m!$(第二步的方法的个数) 所得到的就是排列数 A_n^m。所以从 n 个不同的球中选取 m 个球 (不放回) 一共有 $\frac{A_n^m}{m!}$ 种方法。在这个分式里面上下同时乘以 $(n-m)!$，我们得到

$$\frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

我们记作 $\binom{n}{m}$ 或者 C_n^m，我们把它叫做组合数，选择哪一种符号取决于你参加何种类型的考试，注意 $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$。注意 $0! = 1$，所以 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$。请用归纳法验证下面的组合数公式

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

下面是二项式定理: $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$。你可以采用两种路径证明它，一种是利用乘法原理:

$$(a+b)^n = (a+b)*(a+b)*\cdots*(a+b),$$

完成这件事就是在上面的 n 个括号里面的每个括号中选择一个数 a 或者 b 参与到乘法运算中，从而得到答案。另外一种就是应用归纳法，证明是冗长的，但却是平淡的。请分别用这两种方法验证。

我们现在可以计算元素个数为 n 的集合 S 中的所有子集有多少了。采用加法原理，完成这件事情有 n 种方式，元素个数为 0 的子集只有一个，就

是空集 $\emptyset$; 然后计算元素个数为 1 的子集个数，它当然是组合数 $\binom{n}{1}$；计算元素个数为 2 的子集个数，它当然是组合数 $\binom{n}{2}$，继续进行下去，我们得到集合 S 中的所有子集一共有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

个，利用二项式定理，注意到这个数据实际上就是 $(1+1)^n$，所以元素个数为 n 的集合 S 中的所有子集个数共有 2^n 个 (包含空集 $\emptyset$ 和本集 S)。

1.2 例题

例 1.2.1. $A=\{x\in\mathbb{R}|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\in\mathbb{R}|2x^2-3[x]-5=0\}$，其中 $[x]=\max\{a\in\mathbb{Z}|a\le x\}$ 是 *Gauss* 函数。计算 $A\bigcap B$。

例 1.2.2. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y\in\mathbb{Z},x^2+y^2\le 1\}$，$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y\in\mathbb{Z},|x|\le 2,|y|\le 2\}$。计算集合 $A\oplus B:=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)|(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$ 中元素的个数。

例 1.2.3. $A=\{x|x=a^2+b^2,a,b\in\mathbb{Z}\}$，$x_1,x_2\in A$，证明 $x_1x_2\in A$。

例 1.2.4. 设 $a,b\in\mathbb{R}$，$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=n,y=an+b,n\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbb{Z}\}$，$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 144\}$。是否存在 a,b 使得 $A\bigcap B\neq\emptyset$，且 $(a,b)\in C$。

例 1.2.5. 设 $S\subset\mathbb{Z}$，$|S|=10$，且每个元素都是两位数，求证：S 中存在两个不相交的子集使得这两个子集的元素和相等。

例 1.2.6. 设 f 是函数，$M=\{x|f(x)=x\}$，$N=\{x|f(f(x))=x\}$。求证：$M\subset N$，并且如果 f 是单调递增的，则 $M=N$。

例 1.2.7. 计算不超过 120 的合数和素数的个数。 Hint : $120<11\times 11$

例 1.2.8. 由 1, 2, 3 组成的 n 位数，要求 n 位数中 1, 2, 3 每一个至少出现一次，求所有这种 n 位数的个数。

例 1.2.9. 如果 $A=\{x\in\mathbb{R}|x^2+(p+2)x+1=0\}\subset\mathbb{R}^-$，计算实数 p 的取值范围。

例 1.2.10. 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

例 1.2.11. 证明：一个有限集的全体子集可以按照如下方式排成一行

(i) 左起首位为空集；

(ii) 每个子集在此行中出现一次；

(iii) 每个子集中的元素是前一个子集添加一个元素或者删去一个元素所得到的。

例 1.2.12. *(Euclid)* 证明素数有无穷个。

例 1.2.13. 计算集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\lg(x^3+\frac{y^3}{3}+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y\}$ 中元素的个数。

例 1.2.14. $M=\{x,xy,\lg xy\}$, $S=\{0,|x|,y\}$, 如果 $M=N$, 计算 $\sum\limits_{i=1}^{2015}(x^i+\frac{1}{y^i})$。

例 1.2.15. 设含有 10 个元素的集合的全部子集个数为 n，其中由 3 个元素组成的子集个数为 m，计算 $\frac{m}{n}$。

例 1.2.16. 设有 1999 个集合，每个集合中有 45 个元素，任意两个集合只有一个公共元素，计算这 1999 个集合的并集中的元素个数。

Ex. 1. 容斥原理 $(n=4)$

$|A\cup B\cup C\cup D| = |A| + |B\cup C\cup D| - |A\cap(B\cup C\cup D)|$

$= |A|+|B|+|C|+|D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |B\cap C\cap D| - |A\cap B| - |A\cap(C\cup D)|$
$+ |A\cap B\cap(C\cup D)|$

$= |A|+|B|+|C|+|D| - |A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |B\cap C\cap D|$
$+ |A\cap C\cap D| + \cdots\cdots - |A\cap B\cap C\cap D|$

→ Ex 1.2.5

Ex. 2. $S\subseteq Z$, $|S|=10$, $\forall s\in S$, s为两位数

证明：$\exists A, B\subseteq S$, $A\cap B=\varnothing$, $\sum\limits_{a_i\in A} a_i = \sum\limits_{b_i\in B} b_i$

证明：S共有1023个非空子集

而子集的所有元素之和只有 $10\sim 945$

$945-10+1 = 936 < 1023$，根据抽屉原理，必有

$A, B\subseteq S$, $\sum\limits_{a_i\in A} a_i = \sum\limits_{b_i\in B} b_i$

下面证明存在这样的$A\cdot B$, $A\cap B=\varnothing$

i $A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ 成立

ii $A\cap B\neq\varnothing$

令 $A' = A\cap\overline{A\cap B}$, $B' = B\cap\overline{A\cap B}$

$\therefore A'\cap B' = \varnothing$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{a_i'\in A} a_i' &= \sum_{a_i\in A} a_i - \sum_{c_i\in A\cap B} c_i \\ \sum_{b_i'\in B} b_i' &= \sum_{b_i\in B} b_i - \sum_{c_i\in A\cap B} c_i\end{aligned}\right\}\text{相等}$$

$\therefore$ 命题得证。

Ex. 1.2.1

解：$A = (-2,3)$ 令 $A' = \{-2,-1,0,1,2\}$，

则 $\forall x\in A$, $[x]\in A'$

A'为B中$[x]$所有可能的取值

i $[x]=-2 \Rightarrow B_{-2}=\varnothing$，舍

ii $[x]=-1 \Rightarrow B_{-1} = \{-1,1\} \Rightarrow -1\in A\cap B$

iii $[x]=0 \Rightarrow B_0 = \{-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\}$，舍

iv $[x]=1 \Rightarrow B_1 = \{-2, 2\}$，舍

v $[x]=2 \Rightarrow B_2 = \{-\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{\sqrt{22}}{2}\} \Rightarrow [\frac{\sqrt{22}}{2}]=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{22}}{2}\in A\cap B$

$\therefore A\cap B = \{-1, \frac{\sqrt{22}}{2}\}$

→ Ex 1.2.2

Ex. 3. $A = \{(x,y)\in R^2 \mid x,y\in Z,\ x^2+y^2\le 1\}$

$B = \{(x,y)\in R^2 \mid x,y\in Z,\ |x|\le 2,\ |y|\le 2\}$

$A\oplus B := \{(x_1+x_2, y_1+y_2) \mid (x_1,y_1)\in A,\ (x_2,y_2)\in B\}$

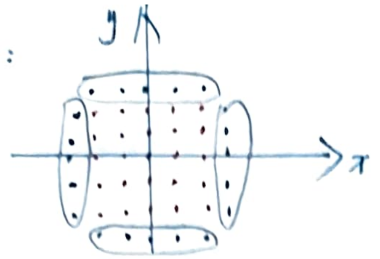
求 $|A\oplus B|$

解：$A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)\}$

对于B中某点考虑，相当于其分别向上、下、左右移动一个单位以及其自身，

这5个点均$\in A\oplus B$

集合B：



因此只需将边界的点向外各平移一个单位

即加上图内的20个点

$\therefore |A \oplus B| = 5\times5 + 5\times4$

$= 45$

Ex. 1.2.3

证明：显然。$((a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2)$

Ex. 1.2.6

证明：首先证 $M \subseteq N$

$\forall x \in M,\quad f(x) = x$

$\therefore f(f(x)) = f(x) = x \quad \Rightarrow x \in N$

$\therefore M \subseteq N$

其次证若f单调增，则 $M=N$；只需证 $M \supseteq N$

即证：$\forall x \in N,\quad f(x) = x$

假设 $\exists x \in N,\ f(x) \neq x$

i $f(x) > x \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(f(x)) \Rightarrow x > f(x)$，矛盾

ii $f(x) < x \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(f(x)) \Rightarrow x < f(x)$，矛盾

$\therefore$ 假设不成立

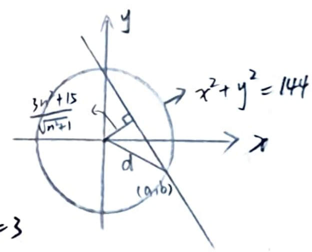
$\therefore f(x) = x \qquad \therefore M \supseteq N \quad \therefore M = N$

Ex. 1.2.4

解：设 $(n,\ an+b) \in A \cap B$

则 $an+b = 3n^2+15$

$\therefore (a,b)$ 在 $y = -nx + 3n^2 + 15$ 上 → l



$\therefore (0,0)$ 到 l 的距离 $\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}$

$\therefore d \geqslant \frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}} = 3\sqrt{n^2+1} + \frac{12}{\sqrt{n^2+1}} \geqslant 12$, iff $n^2=3$

又 $\because (a,b) \in C \quad \therefore a^2+b^2 \leq 144 \quad \therefore d \leq 12$

$\therefore d$ 只能为12，此时 $n = \pm\sqrt{3} \notin Z$

$\therefore$ 不存在。

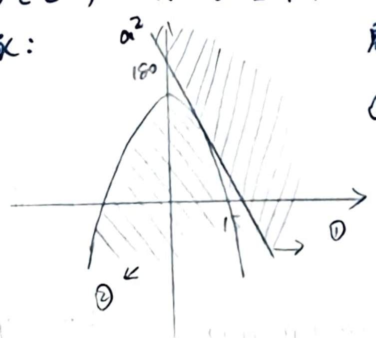
Qs：试用判别式证明

证明：$\because an+b = 3n^2+15 \quad \therefore 3n^2 - an - b + 15 = 0$

$\Delta = a^2 - 12(15-b) \geq 0 \quad \therefore a^2 \geqslant -12b + 180 \to ①$

$\because (a,b) \in C,\quad \therefore a^2 \leq 144 - b^2 \to ②$

作出图像：



易知 $y = -12x + 180$ 与 $y = 144 - x^2$ 相切

①.②唯一解为两图象交点

$\therefore a^2 = 108,\ b = 6$

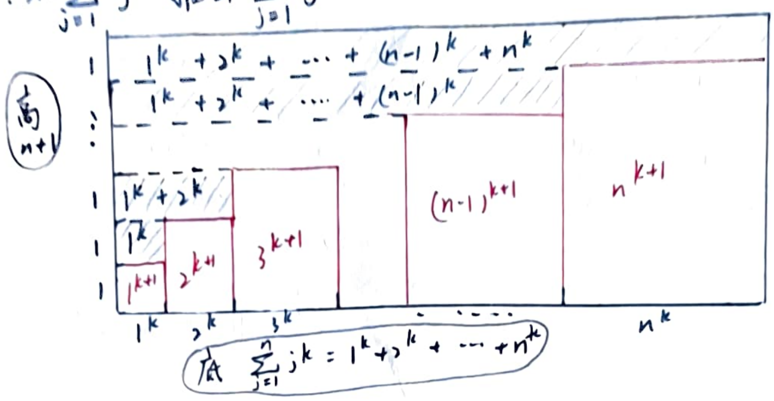
此时 $n = \sqrt{3} \notin Z$，舍

$\therefore$ 不存在。

Ex. 4. 用归纳法证明: $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1)$

证明: Trivial.

算法: 从 $\sum_{j=1}^{n} j^k$ 推出 $\sum_{j=1}^{n} j^{k+1}$



$$\therefore (n+1)\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{j=1}^{n} j^{k+1} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} j^k$$

应用: 已知 $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1)$, 求 $\sum_{j=1}^{n} j^2$

解:
$$\begin{aligned}(n+1)\sum_{j=1}^{n} j &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} j \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}m(m+1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Qs: 试用 $\sum_{j=1}^{n} j^2$ 推出 $\sum_{j=1}^{n} j^3$ (或用归纳法证明)

解:
$$\begin{aligned}(n+1)\sum_{j=1}^{n} j^2 &= \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} j^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} j\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{12}n(n+1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Ex. 1.2.13

解: $\because x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{9} \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{y^3}{3} \cdot \frac{1}{9}} = xy$, iff $x^3 = \frac{y^3}{3} = \frac{1}{9}$ 时取等

$\therefore \lg\left(x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{9}\right) \geq \lg xy = \lg x + \lg y$

$\because \lg\left(x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{9}\right) = \lg x + \lg y$ $\therefore$ 当且仅当 $x^3 = \frac{y^3}{3} = \frac{1}{9}$ 时, $(x,y) \in S$

$\therefore |S| = 1$