题目

已知集合 A 为非空数集，定义：
$S=\{x \mid x=a+b, a,b\in A\}$，
$T=\{x \mid x=|a-b|, a,b\in A\}$。
(1) 若集合 $A=\{1,3\}$，求证：$2\in S$，并直接写出集合 T；
(2) 若集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $T=A$，求证：$x_1+x_4=x_2+x_3$；
(3) 若集合 $A\subseteq\{x \mid 0\leq x\leq 2021, x\in N\}$，$S\cap T=\varnothing$，记 $|A|$ 为集合 A 中元素的个数，求 $|A|$ 的最大值。

Note：用 $|S\cup T|$ 进行中转。遇到这种题，不一定要从答案出发构造证明，可直接讨论最大值可能为多少并尝试对最大值进行构造。注意思想方法。

解：(3) 先设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$a_1<a_2<\cdots<a_k$

$\therefore S=\{2a_1, a_1+a_2, 2a_2, \cdots\cdots, 2a_k\}$

当上述集合中元素是 S 中全部时，$|S|$ 最小

$\therefore |S|\geqslant 2(k-1)+1=2k-1$

$T=\{0, a_2-a_1, a_3-a_1, \cdots a_k-a_1\}$，

当出现上述情况时，$|T|$ 最小

$\therefore |T|\geqslant k$

$\therefore S\cup T=\{0, a_2-a_1, \cdots\cdots, 2a_k\}$

当 $S\cup T$ 包含 0 到 $2a_k$ 之间所有整数时，$|S\cup T|$ 最大

$\therefore |S\cup T|\leq 2a_k+1$

$\because S\cap T=\varnothing$ $\therefore 2k-1+k=3k-1\leq |S\cup T|$

$\therefore 3k-1\leq 2a_k+1$，$k\leq \frac{2a_k+2}{3}$

$\because a_k$ 最大时，$\frac{2a_k+2}{3}$ 最大，$a_k\leq 2021$

$\therefore k\leq \frac{4042+2}{3}=1348$

$\therefore$ 当 $A=\{674, 675, \cdots, 2021\}$ 时，A 满足条件且 $|A|=1348$

$\therefore |A|$ 最大为 1348

题目

集合 M,N,S 都是非空集合，现规定如下运算：
$M\oslash N\oslash S$
$=\{x \mid x\in(M\cap N)\cup(N\cap S)\cup(S\cap M)\}$
且 $x\notin(M\cap N\cap S)$。
若集合
$A=\{x \mid a<x<b\}, B=\{x \mid c<x<d\}, C=\{x \mid e<x<f\}$
，其中实数 a,b,c,d,e,f 满足：
1 $ab<0, cd<0, ef<0$；
2 $a-b=c-d=e-f$；
3 $a+b<c+d<e+f$。
则 $A\oslash B\oslash C=$ ______。

Note：注意、$\{e\}$ 和 $\{b\}$ 两个点能取~~不~~到

定义 $A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$，设A、B、C为某集合三个子集，且满足 $(A-B)\cup(B-A)\subseteq C$，
则 $A\subseteq(C-B)\cup(B-C)$ 是 $A\cap B\cap C=\varnothing$ 的（　　）

A. 充要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

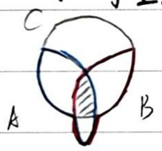
错因：未用画图分析问题，只证出必要性

解：

如左图，∵ $(A-B)\cup(B-A)\subseteq C$

∴ $B-C-(A\cap B)=\varnothing$，$A-C-(A\cap B)=\varnothing$

∴可重新画图如下：



由红线包围的为B，由蓝线包围的为A

∴ (⇐) ∵ $A\cap B\cap C=\varnothing$

∴阴影部分为∅

∴ $A=[C_{(C-B)}(C-A-B)]\sqcup(A\cap B\cap C)\sqcup[(A\cap B)-(A\cap B\cap C)]$

其中 ⊔ 表示无交并

$(C-B)\cup(B-C)=[(A\cap B)-(A\cap B\cap C)]\sqcup(C-B)$

∵ $A\cap B\cap C=\varnothing$ ∴ $[C_{(C-B)}(C-A-B)]\sqcup(A\cap B\cap C)$

$=C_{(C-B)}(C-A-B)\subseteq(C-B)$

∴ $A\subseteq(C-B)\cup(B-C)$

(⇒) ∵ $A\subseteq(C-B)\cup(B-C)$ ∴若 $A\cap B\cap C$ 非空，则 $A\cap B\cap C\not\subseteq(C-B)\cup(B-C)$

又∵ $A\supseteq A\cap B\cap C$ ∴ $A\not\subseteq(C-B)\cup(B-C)$，矛盾 ∴ $A\cap B\cap C=\varnothing$

综上，$A\subseteq(C-B)\cup(B-C)$ 是 $A\cap B\cap C=\varnothing$ 的充要条件。

反思：通过刚刚的过程，我发现从理论角度推导是完全可行的。我引入了无交并这个运算，其主要意义在于，当把某个集合写成若干个集合的无交并，论证其是另一个集合的子集的问题可以被转化为这些无交的子集与另一个集合的若干无交子集是否存在对应的包含或相等关系，因此这个想法虽然远比画图抽象，但的确可以绕开画图得出结论。但考试时心态不好，我没能完成推导，这是需要反思的；没能想到更简单的方法，这也是需要反思的。

（例如：对 $B-C$ 进行推导，$B-C=B-(B\cap C)$

∵由上述推导得，$B-C-(A\cap B)=\varnothing$

∴ $B-C=B-(B\cap C)$

$=(A\cap B)\sqcup C_B(A\cap B)-(B\cap C)$

$=(A\cap B-B\cap C)\sqcup(B-A\cap B-B\cap C)$

$=(A\cap B-B\cap C)\sqcup(B-A-C)$

$=(A\cap B-A\cap B\cap C)\cup[B-C-A\cap B]$

$=A\cap B-A\cap B\cap C$

用这样的思路可以把A、$(C-B)\cup(B-C)$ 都这样表示出来，再按我所说的方法推即可。）

设x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3是六个互不相等的实数，则下列6个式子中，$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ ①，$x_1y_1+x_2y_3+x_3y_2$ ②，$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1$ ③，$x_1y_2+x_2y_1+x_3y_3$ ④，$x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1$ ⑤，~~$x_1y_3+x_2y_1$~~，$x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2$ ⑥，能同时取同一值的代数式最多有 __2__ 个

解：不妨设$x_1<x_2<x_3$，$y_1<y_2<y_3$

$\therefore$ ①-②得 $(x_2-x_3)(y_2-y_3)>0$

由此类推，可知只要有一项完全相同即不可能相等

$\therefore$ ①≠②，①≠④，①≠⑤，②≠③，②≠⑥，③≠④，④≠⑤

④≠⑥，⑤≠⑥

$\therefore$ 可能有①=③=⑥，②=④=⑤

但是，$\because$ ①-⑥ $=(x_2-x_1)(y_2-y_1)+(x_3-x_1)(y_3-y_2)>0$ $\therefore$ ①≠⑥

同理，②≠⑤

$\therefore$ 不可能有3个连等 $\therefore$ 最多有2个相等，即答案为2个

已知集合$M=\{x|x=4n+6m,m,n\in Z\}$，$N=\{x|x=10a+8b,a,b\in Z\}$，则M与N的关系为：D

A. $M\cap N=\varnothing$　B. $N\subsetneq M$　C. $N\subsetneq M$　D. $M=N$

解：法①：$N\subseteq M$：令$n=2b+a$，$m=a$即可

$M\subseteq N$：① m、n同奇/同偶

$\therefore$ 令$a=m$，$b=\frac{n-m}{2}$

② n偶m奇，设$m=2k_1+1$，$n=2k_2$

$\therefore$ 令$a=2k_1+3$，$b=k_2-k_1-3$

③ n奇m偶，设$n=2k_1+1$，$m=2k_2$

$\therefore$ 令$a=2k_2+2$，$b=k_1-k_2-2$

法②：M：$x=2(2n+3m)$

考虑$2n+3m=2(n+m)+m=t$

显然$n+m\in Z$且与m无关，则$t=2k+m$

易知t可涵盖一切整数 $\therefore$ M为偶数集

设$x\in R$且$x\neq 0$，若$x+x^{-1}=3$，猜想$x^{2n}+x^{-2n}$的个位数字是 <u>7或2</u>

Note: $n\equiv 0 \bmod 3$ 时，末位为2，其余末位为7

若$f(x)=ax^2+2x$定义域为区间$[m,n]$，其中$a,m,n\in R$，若$f(x)$值域为$[-4,4]$，求$n-m$取值范围。

解： i $a=0$

$\therefore\ 2m=-4,\ 2n=4$，

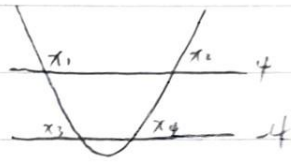
$\therefore\ n-m=4$

ii $a>0$

$\because$ 值域为$[-4,4]$

$\therefore\ ax^2+2x=-4$和$ax^2+2x=4$均有解

$\therefore\ a\in(0,\frac{1}{4}]$



记右图中四个根为x_1,x_2,x_3,x_4

$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{a}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{a}$，$x_3=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{a}$，$x_4=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{a}$

① 顶点未落在$y=-4$上

$\therefore\ [m,n]=[x_1,x_3]=[x_4,x_2]$

$\therefore\ x_3-x_1=x_2-x_4=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{a}-\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{a}=\frac{\sqrt{1-4a}-\sqrt{1+4a}}{a}$

$\therefore$ 求$n-m$取值即求$\frac{\sqrt{1-4a}-\sqrt{1+4a}}{a}$在$a\in(0,\frac{1}{4})$上值域

(1) 最大值

$\because\ (n-m)^2=\left(\frac{\sqrt{1-4a}-\sqrt{1+4a}}{a}\right)^2=\frac{2-2\sqrt{1-16a^2}}{a^2}$

$\because\ a\in(0,\frac{1}{4})$ $\therefore\ \frac{1}{a^2}$在$(0,\frac{1}{4})$上递增

$\because\ 1-16a^2$在$(0,\frac{1}{4})$上递减 $\therefore\ 2-2\sqrt{1-16a^2}$在$(0,\frac{1}{4})$上递增

$\therefore\ (n-m)^2$在$(0,\frac{1}{4})$上递增

$\therefore\ (n-m)_{max}=f(a)|_{a=\frac{1}{4}}=4\sqrt{2}$ $\therefore\ n-m<4\sqrt{2}$

(2) 最小值

根据增减性，很显然最小值在$a=0$时取得

但$f(a)$在$a=0$处无定义。有两种方法求该情况：

法1：我们直接忽略左半段，那么可以认为在 $a\to 0$ 时，抛物线右半段在不断接近 $y=2x$

$\therefore$ 我们认为在 $a>0$ 时，$n-m>l_1$，且 l_1 是下确界

$\therefore$ $n-m>4$

法2：即求极限 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{2-2\sqrt{1-16a^2}}{a^2}$

这是一个 0/0 不定式，应用洛必达：

$$\lim_{a\to 0}\frac{2-2\sqrt{1-16a^2}}{a^2}=\lim_{a\to 0}\frac{(2-2\sqrt{1-16a^2})'}{(a^2)'}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{32a}{\sqrt{1-16a^2}}\Big/2a$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{16}{\sqrt{1-16a^2}}$$

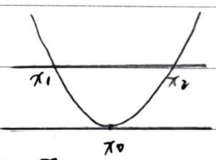
$$=16$$

$\therefore$ $a\to 0$ 时，$(n-m)^2\to 16$　　$\therefore$ $n-m>4$

$\therefore$ 在顶点在 $y=-4$ 以下时，$n-m\in(4,4\sqrt{2})$

② 顶点落在 $y=-4$ 上

如右图，此时 $a=\frac{1}{4}$



$\therefore$ $(n-m)_{min}=x_0-x_1$，$(n-m)_{max}=x_2-x_1$

$\therefore$ $n-m\in[4\sqrt{2},8\sqrt{2}]$　　$\therefore$ 故 $a>0$ 时，$n-m\in(4,8\sqrt{2}]$

iii　$a<0$

同 $a>0$ 的情况，$n-m\in(4,8\sqrt{2}]$

$\therefore$ 综上，$n-m\in[4,8\sqrt{2}]$

已知定义域为 D 的函数 $y=f(x)$.当 $a\in D$ 时，若 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$（$x\in D$，$x\neq a$）是增函数，则称 $f(x)$ 是一个"$T(a)$ 函数".（1）判断函数 $y=2x^2+x+2$（$x\in\mathbf{R}$）是否为 $T(1)$ 函数，并说明理由；

（2）若定义域为 $[0,+\infty)$ 的 $T(0)$ 函数 $y=s(x)$ 满足 $s(0)=0$，解关于 λ 的不等式 $s(2\lambda)<\lambda s(2)$；

③ 设 P 是满足下列条件的定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=W(x)$ 组成的集合：①对任意 $u\in\mathbf{R}$，$W(x)$ 都是 $T(u)$ 函数；② $W(0)=W(2)=2$，$W(-1)=W(3)=3$．若 $W(x)\geq m$ 对一切 $W(x)\in P$ 和所有 $x\in\mathbf{R}$ 成立，求实数 m 的最大值．

(1)解：$g(x)=\dfrac{2x^2+x+2-5}{x-1}$

$=\cancel{x}+3$　$2x+3$

$\because$ $y=x+3$ 为增函数

$\therefore$ $y=2x^2+x+2$ 为 $T(1)$ 函数

(2)解：$g(x)=\dfrac{s(x)}{x}$

$\because$ $s(x)$ 为 $T(0)$ 函数

$\therefore$ $\dfrac{s(x)}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时为增函数

i　$\lambda>0$

$\because$ $\dfrac{s(2\lambda)}{2\lambda}<\dfrac{s(2)}{2}$

$\therefore$ $2\lambda<2$，　$\lambda<1$

ii　$\lambda=0$，则有 $0<0$，舍

$\therefore$ $\lambda\in(0,1)$

(3)解：$\because$ $\forall u\in R$，$W(x)$ 为 $T(u)$ 函数

$\therefore$ $\forall(u,W(u))$，$(x,W(x))$，$u\neq x$

$\dfrac{W(u)-W(x)}{u-x}$ 递增

$\therefore$ 对于某个给定在 f 上的点 $(a,f(a))$，

与另一点 $(x,f(x))$ 与之连线的斜率随 x 递增

若 f 存在 2 个及以上个拐点，则任取相邻两拐点 $a_1<a_2$，则两点中必有一个极大值，一个极小值。

若 a_1 处为极大值，取 $x<a_1$，连接该点与所取两拐点，即为原命题一反例；

同理，若 a_2 处为极大值，取 $x>a_2$ 即可

【回顾反思】

$\therefore$ $f(x)$ 至多有一个拐点

$\because$ $W(0)=W(2)$　$\therefore$ $f(x)$ 恰有一拐点

$W(-1)=W(3)=3$　$\therefore$ 该拐点为极小值

当该点为 $y=-x+2$，$y=x$ 交点时，

$W(x)$ 最小（取不到）

$\therefore$ $W(x)>1$

$\therefore$ m 最大为 1