Informal Notes on Mathematics

2022.12.10

第二次课

1、二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$$

证明：用归纳法证明。

$n=1$时显然成立。

$n=k$时，假设成立，则有 $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{n-i}$

下证$n=k+1$时亦成立，即有 $(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i a^i b^{k-i+1}$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = (a+b)\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{n-i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \underbrace{a^{k+1}}_{\text{提出原求和式的最后一项}} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i a^i b^{k-i+1} + \underbrace{b^{k+1}}_{\text{提出原式第一项}}$$

(改写成统一形式) $= \sum_{i=1}^{k} C_k^{i-1} a^i b^{k-(i-1)} + a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i a^i b^{k-i+1} + b^{k+1}$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(C_k^{i-1} + C_k^i)}_{C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}} a^i b^{k-(i-1)} + a^{k+1} \cdot C_{k+1}^0 + b^{k+1} \cdot C_{k+1}^{k+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i a^i b^{(k+1)-i}$$

∴ 对$n=k+1$成立　∴ 命题得证。

2、集合子集个数：$|2^A| = 2^{|A|}$

证明：$|2^A| = C_{|A|}^1 + C_{|A|}^2 + C_{|A|}^3 + \dots + C_{|A|}^{|A|}$

$= (1+1)^n$ （二项式定理）

$= 2^n$

补充练习：

Ex 1.5.1

解：硬算可得，$n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ∴ $\sum_{a \in A} a = 57$

Ex 1.5.2

解：若$a \in S$，则 $6-a \in S$，把$\{1,5\}$，$\{2,4\}$，$\{3\}$看作一个整体

∴ S的个数：$2^3 = 8$个

Ex. 1.5-3 （已知 $\lg 2 \approx 0.3010$）

解： $10^m = 2^n$， $m = n\lg 2$

$\because n \in [0, 1000]$， $n \in Z$

$\therefore m \in [0, 1000\lg 2]$ $\because$ 取整数

$\therefore$ 涵盖的整数为 $0 \sim 301$

$\therefore$ 共 $301 - 0 + 1 = 302$ 个

Ex. 1.5.4

解：最大： $\frac{3}{1} + 4 = 7$

最小：设 $b = a + t$， $t \geq 0$

$\frac{3}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{3b}{a}} = 2\sqrt{3 + \frac{t}{a}} \geq 2\sqrt{3}$， iff $a = b = \sqrt{3}$ 取等

$\therefore |x - y|_{max} = 7 - 2\sqrt{3}$

Ex. 1.5.5

解： i 判断 0

设 $x, y \in P$， $x > 0$， $y < 0$

$\because$ P 对加法封闭

$\therefore$ 若 $a \in P$，则 $na \in P$，其 $n \in N^*$

$\therefore xy = \underbrace{y + y + \cdots + y}_{x个} \in P$， $(-y)x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{-y个} \in P$

$\therefore xy + (-y)x = 0 \in P$ $\therefore 0 \in P$

ii 判断 2

假设 $2 \in P$， 令 $b \in P$，b 为奇数

由 (1) 知， $na \in P$ 又 $\because 0 \in P$ $\therefore -na \in P$ $\therefore$ a 的整数倍 $\in P$

设 $b = 2k + 1$， $k \in Z$

$\therefore -1 = 2k + 1 - 2(k+1) \in P$，矛盾 $\therefore 2 \notin P$

1.5 补充练习

练习 1.5.1. $A=\{n|n^3<2022<3^n\}$，计算 A 的所有元素之和。

练习 1.5.2. 非空数集 $S\subset\{1,2,3,4,5\}$，那么符合条件"若 $a\in S$，则 $6-a\in S$"的集合 S 的个数有多少个？

练习 1.5.3. $M=\{x|x=2^n,n\in\mathbb{Z},0\leq n\leq 1000\}$，把 M 中最高位数字是 1 的数抽出组成一个新的集合 A，计算 $|A|$。

练习 1.5.4. $A=\{\frac{3}{a}+b|1\leq a\leq b\leq 4\}$，如果 $x,y\in A$，计算 $|x-y|$ 的最大值。

练习 1.5.5. 设 $\mathbb{Z}$ 的子集 P 具有性质：

(i) P 中元素有一些正数也有一些负数；

(ii) P 中元素有一些奇数也有一些偶数；

(iii) $-1\notin P$，

(iv) P 对加法封闭。

判断 0,2 是否在 P 中。

练习 1.5.6. $A,B\subset\{1,2,\cdots,20\},A\bigcap B=\emptyset$，且 $n\in A$ 时 $2n+2\in B$，计算 A 中元素之和的最大值。

练习 1.5.7. 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，且 $xy\neq 0$，则 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{xy}{|xy|}$ 所组成的集合中含有元素的个数有多少？

练习 1.5.8. $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 A 的非空子集，$|A|=11$，当 $i\neq j$ 时，$A_i\bigcup A_j\neq A$，则 n 的最大值为多少？

练习 1.5.9. 设 $B\neq C$，写出一个 $A\bigcup B=A\bigcup C$ 的必要条件。

练习 1.5.10. 设 $\mathbb{Z}$ 为全集，$M=\{x|x=2n,n\in\mathbb{Z}\},N=\{x|x=3n,n\in\mathbb{Z}\}$。写出集合 $M\bigcap\overline{S}$。

练习 1.5.11. 设 S_1,S_2,S_3 为非空整数集合，对于 1,2,3 的任意一个排列 i,j,k，若 $x\in S_i,y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$。

(1) 求证：三个集合中至少有两个相等。

(2) 三个集合中是否有两个集合无公共元素？

练习 1.5.12. 把集合 $A=\{1011,1012,\cdots,2022\}$ 任意划分为两个不相交的子集。证明：至少有一个子集包含两个元素，使得这两个元素之和是一个完全平方数。

练习 1.5.13. 集合 A,B,C 满足

(1) $n(A)+n(B)+n(C)=n(A\bigcup B\bigcup C)$;

(2) $|A|=|B|=100$. 求 $A\bigcap B\bigcap C$ 的最小值。($n(A)$ 表示 A 的子集个数)