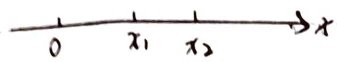
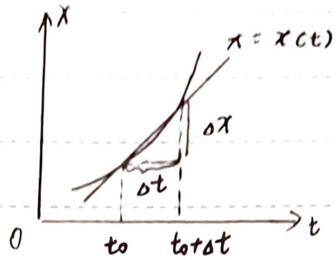
第0章 高等数学

第1节 导数

1. 差商

求 x_1 处 v:





$$\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

读作: limit Δt goes to 0, Δx over Δt

加速度:

$$\bar{a} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

割线斜率: $k = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

切线斜率: $k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

2. 导数 (derivative)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

表示方式:

y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$, $\frac{d}{dx}f(x)$

$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0} \neq \frac{df(x_0)}{dx}$ (符号游戏)

例1: $f(x)=x^2$, 求 $f'(x)$, $f'(-1)$, $f'(2)$

解:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\Big|_{\Delta x \to 0} \\ &= \frac{x \cdot 2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}\Big|_{\Delta x \to 0} \\ &= 2x \end{aligned}$$

$f'(-1) = -2$, $f'(2) = 4$

例2: 求 $y=\sqrt{x}$ 过点 $(1,1)$ 的切线和法线

解:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\Big|_{\Delta x \to 0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\Big|_{\Delta x \to 0} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$\therefore f'(1) = \frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 切线：$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$，法线 $\therefore y = -2x + 3$

（可用点斜式：$y - y_0 = k(x - x_0)$）

幂法则：$(x^n)' = nx^{n-1}$

例3：证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 为一定值

证明：考察 $y = 2^x$

$$(2^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2^{x+\Delta x} - 2^x}{\Delta x}$$

$$= 2^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= 2^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2^{\Delta x}-1}\cdot\log_2 2^{\Delta x}}$$

$$= 2^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\log_2(1+2^{\Delta x}-1)^{\frac{1}{2^{\Delta x}-1}}}$$

设 $\frac{1}{2^{\Delta x}-1} = t$

$$\therefore \text{上式} = 2^x \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\log_2(1+\frac{1}{t})^t}$$

$$= 2^x \frac{1}{\log_2[\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t]}$$

$\therefore y'(0) = k$ 为一定值

$$\therefore \log_2[\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t] = \frac{1}{k}$$

$$\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = 2^{\frac{1}{k}} \rightarrow \text{为一定值}$$

令 $e = \lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t$ （e的定义）

例4：求 $y = e^x$ 的导数

解：把例3中的 2 全换成 e

$\therefore (e^x)' = e^x \cdot \log_e e = e^x$

（我们记 $\log_e x$ 为 $\ln x$）

指数函数：$(a^x)' = a^x \ln a$

初等函数：指、对、三角、反三角、幂

$y=a^x$， $y=\log_a x$ ， $y=x^a$

$y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\tan x$， $y=\cot x$

$y=\arcsin x$， $y=\arccos x$，$y=\arctan x$， $y=\text{arccot}\, x$ } 基本初等函数

以及它的 +、−、×、÷、复合

例5. 求 $y=\sin x$ 导数

解： $y'=\left.\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=\left.\dfrac{\sin x\cos\Delta x+\sin\Delta x\cos x-\sin x}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=\left.\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cos x\right|_{\Delta x\to 0}$

注意：当 $x\to 0$ 时， $\sin x = x = \tan x$.

$\therefore y' = \cos x\,|_{\Delta x\to 0} = \cos x$

例6. 求 $y=\cos x$ 导数

解：$y'=\left.\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=\left.\dfrac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=-\sin x\left.\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=-\sin x$

加法：$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

例7、证明 $y=u(x)v(x)$ 的导数 $y'=u'v+uv'$

证明：$(uv)'=\left.\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=\left.\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}+\dfrac{v(x+\Delta x)u(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}$

$=u'v(x+\Delta x)+uv'\,|_{\Delta x\to 0}$

$=u'v+uv'$

例8. 证明 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 的导数 $y'=\dfrac{u'v-uv'}{u^2}$

证明： 感觉直接做太 cmronug 了。所以我不按他的 fangfa 做。

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{\frac{1}{u(x+\Delta x)} - \frac{1}{u(x)}}{\Delta x}\bigg|_{\Delta x\to 0}$$

$$= \frac{1}{u(x+\Delta x)u(x)} \cdot \frac{u(x) - u(x+\Delta x)}{\Delta x}\bigg|_{\Delta x\to 0}$$

$$= -\frac{u'}{u^2}$$

∴ 再用乘法法则即可。

例 9. 求 $\tan x$ 导数

解： $y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

例 10. 求 $\cot x$ 导数

解： $y' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x} / \tan^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

例 11. 求 $\ln x$ 导数

解： $\because y = \ln x \Rightarrow x = e^y$

$\therefore \frac{dx}{dy} = e^y \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

反函数： $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

推论： $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

例 12、 Trivial.

例 13. 求 $y = \arcsin x$ 的导数（和 $\arccos x$）

解： $y' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(y' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

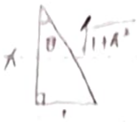
例 14. 求 $y = \arctan x$ 的导数

解： $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

$\therefore (\arctan x)' = 1\Big/\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$

例15. 求 $y=\operatorname{arccot}(x)$ 导数

解: $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

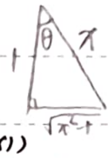


$\therefore \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin^2 y = -\sin^2(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

例16. 求 $y=\operatorname{arcsec}(x)$ 导数

解: $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$



$\therefore \frac{dx}{dy} = -\frac{\sin y}{\cos^2 y}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^2 y}{\sin y} = -\frac{\cos^2(\operatorname{arcsec}(x))}{\sin(\operatorname{arcsec}(x))} = -\frac{1}{x^2}\Big/\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(但也可以不画图:

$\because \frac{dx}{dy} = -\frac{\sin y}{\cos^2 y}$, 且 $x = \frac{1}{\cos y}$

$\therefore \cos y = \frac{1}{x}$, $\sin y = \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \Rightarrow$ ①

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos^2 y}{\sin y} = -\frac{1}{x^2}\Big/\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

问题在于①中求 sin y 时我们直接开根号了,
这似乎违反了求三角函数的规范, 毕竟已知 cos y,
可能对应两个 sin y (一正一负), xenbuyuryaü.)