2 函数

2.1 练习

练习 2.1.1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x(3-x)}}{\lg(x-3)^2}$.

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^x-kb^x}}$，$a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1$

(3) $y=\dfrac{(x^3-3x^2+3x-1)^0}{\sqrt{|x|+x}}$

(4) $y=\dfrac{\ln(3|x|-x^2)}{\sqrt{-[x^2+2x+1]}}$，其中 $[\cdots]$ 为 *Gauss* 函数

(5) $y=\log_2(|x^3+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}|-4)$

(6) $y=f_{2023}(x)$，其中 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, f_{n+1}(x)=f(f_n(x)), n\in\mathbb{Z}_{>0}$

练习 2.1.2. 求下列函数的值域

(1) $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{15-3x}$

(2) $y=x+\sqrt{1-2x}$

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

(4) $y=\dfrac{\sin x-1}{\sin x+2}$

(5) $y=x^2+\dfrac{1}{|x|}$

(6) $y=\sum\limits_{j=1}^{2023}|x+j|$

练习 2.1.3. 如果 $(\sqrt{a^2+1}+a)(\sqrt{b^2+1}+b)=1$，$a,b\in\mathbb{R}$，证明 $a+b=0$.

练习 2.1.4. 狄利克雷 *(Dirichlet)* 函数为

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\bigcap\overline{\mathbb{Q}}\end{cases}$$

讨论它的有界性、单调性与周期性。

练习 2.1.5.

$$f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\le 2\\ (x-2)^2, & x>2\end{cases}$$

$g(x)=b-f(2-x)$，其中 $b\in\mathbb{R}$，如果 $y=f(x)-g(x)$ 有 4 个零点，求 b 的取值范围。

练习 2.1.6. 关于 x 的方程 $\ln(ax)=2\ln(x+1)$ 仅有一个实数解，求实数 a 的取值范围。

练习 2.1.7. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-x$，且对任意实数 x 均有 $f(x)+f(x+1)=1$。设 $a=\log_2 3$，计算 $f(a)+f(2a)+f(3a)$。

练习 2.1.8. 设函数 $f(x)$ 满足：对任何非零实数 x，恒有

$$f(x)=f(1)x+\frac{f(2)}{x}-1,$$

计算 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值。

练习 2.1.9. 设 $a>0$，$f(x)=x^2+2ax+8$，并且

$$\{x:f(x)\le 0\}=\{x:f(f(x))\le 8\}\ne\emptyset,$$

计算 a 的取值范围。

练习 2.1.10. 设 $0\le a<1$ 时，函数 $f(x)=(a-1)x^2-6ax+a+1$ 恒正，求 $f(x)$ 的定义域。

练习 2.1.11. 对于 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)$ 满足 $f(x)+f(1-x)=1$，$f(x)=2f(\frac{x}{5})$，且对于 $0\le x_1\le x_2\le 1$，恒有 $f(x_1)\le f(x_2)$，计算 $f(\frac{1}{2023})$。

练习 2.1.12. 设 $f(x),g(x)$ 均为定义在 $\mathbb{R}$ 上的初等函数，证明 $M(x)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\{f(x),g(x)\}$ 是初等函数。

练习 2.1.13. 设函数 $f(x)=[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{3}]+[\frac{x}{5}]-x$，计算 $f(x)$ 的零点个数。

练习 2.1.14. 设函数 $f(x)=|2-\log_3 x|$，$0<a<b<c$，$f(a)=2f(b)=2f(c)$。计算 $\frac{ac}{b}$。

练习 2.1.15. 设 a,b 为实数，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$。实数 x_1,x_2,x_3 满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ 且 $x_1+1\le x_2\le x_3-1$。计算 $|a|+2|b|$ 的最小值。

第三次课。　　　　2、函数

Ex. 2.1.1

(1) 解：$\begin{cases} x(3-x)\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 3 \\ (x-3)^2\neq 0 或 1 \Rightarrow x\neq 3,2,4 \end{cases} \Rightarrow x\in[0,2)\cup(2,3)$

(2) 解：$a^x-kb^x>0 \Leftrightarrow (\frac{a}{b})^x>k$

① $k\leq 0$，则 $x\in\mathbb{R}$

② $k>0$，

1° $a>b>0$，则 $\frac{a}{b}>1$，则 $x>\log_{\frac{a}{b}}k$

2° $b>a>0$，则 $0<\frac{a}{b}<1$，则 $x<\log_{\frac{a}{b}}k$

3° $a=b$，则当 $k\geq 1$ 时，$x\in\varnothing$；$0<k<1$ 时，$x\in\mathbb{R}$

(3) 解：$y=\frac{(x-1)^0}{\sqrt{|x|+x}} \Rightarrow \begin{cases} |x|+x>0 \Rightarrow x>0 \\ x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

补充：多项式的带余除法

$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$　$(m>n)$

$g(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$

则 $\exists\ q(x), r(x)$, s.t. $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$

(Шицзи шан, я ген дуй йинши фенцзие over the Finite field $\mathbb{F}_n$ ганьб шинцзуй.)

(4) 改题为：$y=\frac{\ln(3|x|-x^2)}{[x^2+2x+1]}$

解：$\begin{cases} 3|x|-x^2>0 \Rightarrow \begin{cases} \text{if } x>0, \Rightarrow 3x-x^2>0 \Rightarrow 0<x<3 \\ \text{if } x<0 \Rightarrow -3x-x^2>0 \Rightarrow -3<x<0 \end{cases} \\ [x^2+2x+1]\neq 0 \Rightarrow x^2+2x+1\geq 1 \Rightarrow x\geq 0 或 x\leq -2 \end{cases}$

$\therefore x\in(-3,-2]\cup(0,3)$

(5) 解：$|x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}|-4>0$

$\Rightarrow |x|^3+|x|+\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^3}>4$

上式 $\geq 4\sqrt[4]{|x|^3|x|\frac{1}{|x|}\frac{1}{|x|^3}}=4$

"=" $\Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$　$\therefore x\neq\pm 1, 0$

(6) 解：$f_1(x)=\frac{x}{1+x}$, $f_2(x)=\frac{x}{1+2x}$ ……, $f_n(x)=\frac{x}{1+nx}$

$\therefore f_{2023}(x)=\frac{x}{1+2023x}$　$\therefore x\neq -\frac{1}{2023}$ (?)

(我感觉是 $x\neq -1, -\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2023}$)

Ex. 2.1.2

(1) 解: $y=\underbrace{\sqrt{x-4}}_{a}+\sqrt{3}\cdot\underbrace{\sqrt{5-x}}_{b}$

$\therefore a^2+b^2=1 \quad \therefore$ 设 $a=\sin\theta$, $b=\cos\theta$

$\therefore y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$= 2\sin(\theta+\frac{\pi}{3}) \in [1,2]$

(2) 解: 换元即可。 $y\in(-\infty,1]$

(3) 解: (双曲余切函数)

令 $t=e^x$, $t\in(0,+\infty)$

$\therefore y=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}=1+\dfrac{2}{t^2-1}\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(5) 解: $y=x^2+\frac{1}{|x|}=x^2+\frac{1}{2|x|}+\frac{1}{2|x|}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2|x|}\cdot\frac{1}{2|x|}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$,

iff $x^2=\frac{1}{2|x|}$, 即 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时取等

$\therefore y\in[\frac{3}{\sqrt[3]{4}},+\infty)$

(6) 解: $y=\sum_{j=1}^{2023}|x+j|$

$=(|x+1|+|x+2023|)+(|x+2|+|x+2022|)+\cdots+|x+1012|$

三角不等式: $|x+a|+|x+b|\geq|(x+a)-(x+b)|=|a-b|$

(Ин факт, фор all metric space (M,d), хав $d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)$)

$\therefore y\geq 2022+2020+\cdots+2=\frac{(2022+2)}{2}\times 1011=1012\times 1011$

Ex. 2.1.3

解: $\sqrt{a^2+1}+a=\sqrt{b^2+1}-b=\sqrt{(-b)^2+1}+(-b)$

下面证 $y=\sqrt{x^2+1}+x$ 的单调性, $\boxed{\text{先证其反函数的单调性}}$

设 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, 则 $f(x)$ 为奇

$\therefore e^{-f(x)}=e^{\ln\sqrt{x^2+1}-x}=\sqrt{x^2+1}-x$

$\therefore x=\dfrac{e^{f(x)}-e^{-f(x)}}{2} \quad \therefore f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow$ 单调递增

$\therefore f(x)$ 单调增 $\quad\therefore \sqrt{x^2+1}+x$ 单调增

$\therefore a=-b$, 即 $a+b=0$

(实际上完全没有必要这样做,但这个思路也挺有趣的)

Ex. 2.1.4

解: $\because a\in\mathbb{Q}$, $b\in\overline{\mathbb{Q}}$, $a+b\in\overline{\mathbb{Q}}$

$\therefore$ 易知 $\forall a\in\mathbb{Q}$ 为 $D(x)$ 周期, $\forall b\in\overline{\mathbb{Q}}$ 不是其周期

无单调性 (Я цзай цидай шеньме.)

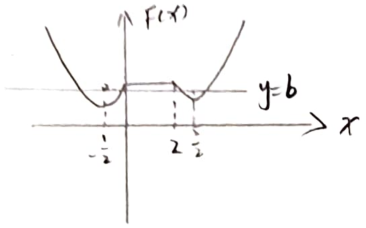
Ex. 2.1.5

解：$f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \le x \le 2 \\ 2+x, & x<0 \\ (x-2)^2, & x>2 \end{cases}$ $\therefore f(2-x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 4-x, & x>2 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$

$\therefore f(x) - g(x) = f(x) + f(2-x) - b$

$= \begin{cases} 2-b, & 0 \le x \le 2 \\ x^2+x+2-b, & x<0 \\ (x-2)^2+4-x-b, & x>2 \end{cases}$

作出 $F(x) = f(x) + f(2-x)$ 图像：



$\therefore \frac{7}{4} < b < 2$

Ex. 2.1.6

解：注意定义域。(Бущуян тин лэ.)

Ex. 2.1.7

解：$\because f(x) + f(x+1) = 1,\ f(x+1) + f(x+2) = 1$

$\therefore f(x) = f(x+2)$

$\because a = \log_2 3 \quad \therefore 2a = 2\log_2 3,\ 3a = \log_2 27$

$\therefore 1 < a < 2,\quad 3 < 2a < 4,\quad 4 < 3a < 5$

$\therefore$ 算即可。

Ex. 2.1.9

解：$f(x) \le 0 \Rightarrow x_1 \le x \le x_2$

$f(f(x)) \le 8 \Rightarrow f(x) \in [-2a, 0] \Rightarrow \{x : f(x) \ge -2a\} \supseteq \{x : f(x) \le 0\}$

下略。

Ex. 2.1.11

解：$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2},\ f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{2}$

$\because f(\frac{1}{5}) = f(\frac{1}{2}),\ 0 \le \frac{1}{5} \le \frac{1}{2} \le 1$

$\therefore \forall x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}],\ f(x) = \frac{1}{2}$

$\because \frac{1}{5} \le \frac{625}{2023} \le \frac{1}{2} \quad \therefore f(\frac{5^4}{2023}) = \frac{1}{2}$

$\therefore f(\frac{1}{2023}) = \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

Ex. 2.1.12

解：$M(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$

$= \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + \sqrt{(f(x) - g(x))^2})$

$\Rightarrow$ 为初等函数。

Ex. 2.1.13

解: $\because f(x)=[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{3}]+[\frac{x}{5}]-x$ $\therefore x\in\mathbb{Z}$

$\therefore \exists!\, m,n,$ s.t. $x=30m+n,\ n\in\{0,\cdots,29\}$

$\therefore f(x)=[\frac{30m+n}{2}]+[\frac{30m+n}{3}]+[\frac{30m+n}{5}]-(30m+n)$

$= m+[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]+[\frac{n}{5}]-n \ =0$

当n确定，则m确定，因而x确定（一个n对应一个m对应一个x）

$\because$ 有30个n $\therefore$ 有30个x.