3 组合数学

在第一章，我们已经了解到组合数学的一些基本事实，下面我们继续描述我们将用到的组合数学的一些初等方法。从 n 个不同的元素中进行放回抽取 r 个元素进行排列，这就是说每个元素允许重复抽取，则完成这件事共有 n^r 种方法，因为每次可选择的元素个数是 n 个，共有 r 个步骤，所以用乘法原理可以看出这件事是显然的，我们把这样的排列叫做可重复排列。

3.1 不全相异元素的全排列

如果在 n 个元素中，不相同的元素共有 k 组 $(k \leq n)$，这也就是说，我们将相同的元素放在一个组，而组数一共有 k 个。我们设第 j 组的元素个数为 n_j，其中 $j = 1, 2, \cdots, k$，所以 $n = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j$，则这 n 个元素的全排列个数为 $\dfrac{n!}{\prod\limits_{j=1}^{k}(n_j!)} = \dfrac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$。这个数据同样容易看出毕竟，因为如果先把这 n 个不全相异的元素看成是全部相异的，于是的这个排列是 $n!$，然后再将每个组的元素还原成相同的元素，于是第 j 个组的排列事实上重复了 $n_j!$ 次，于是由乘法原理总体的重复数是 $n_1! * n_2! * \cdots * n_k!$ 个，所以不全相异的元素的排列个数为 $\dfrac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$。

3.2 多组组合

我们现在考虑 n 个不同元素的分组问题。将 n 个不同元素分成 k 组 $(k \leq n)$，第 j 组有 n_j 个元素，$j = 1, 2, \cdots, k$，则共有多少种方法？同样可以由乘法原理来计算，完成这件事可以分为 k 步，第 1 步从 n 个元素中选取的元素个数 n_1，于是有 $C_n^{n_1}$ 种方法。第 2 步是从剩下的 $n - n_1$ 个元素中选取 n_2 个，于是有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法。第 3 步是从剩下的 $n - n_1 - n_2$ 个元素中选取 n_3 个，于是有 $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ 种方法。继续这样的操作我们看到第

j 步是从剩下的 $n-\sum\limits_{i=1}^{j-1} n_i$ 个元素中选取 n_j 个，从而总共有

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k} C_{n-(n_1+\cdots+n_{j-1})}^{n_j} &= C_n^{n_1} * C_{n-n_1}^{n_2} * \cdots * C_{n-(n_1+\cdots+n_{k-1})}^{n_k} \\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}
\end{aligned}
$$

3.3 可重复组合

从 n 个不同元素中进行放回选取 r 个元素，也就是每个元素允许重复选取，则共有多少种方法？我们设 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是上面这个的选取方案中任一个情况，可重复意思就是在 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中可以有相等的情况，比如 $1, 1, 3, 4, \cdots, r$ 就是说第一个元素 1 被选取了两次，而 $3, 4, \cdots, r$ 分别只选取了一次。由于是无序的，所以我们可以假设 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r$，并且如果等号均不成立那么这就是一个无重复的组合。考虑

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 2, \cdots, y_r = x_r + r - 1,$$

于是 $y_1 < y_2 < \cdots < y_r$，这意味着 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 是一个无重复组合，具体地说是从 $n+r-1$ 个不同元素中不放回地选取 r 个元素的情况，总数为 C_{n+r-1}^r。而显然原先的组合 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 和新的组合 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 是一一对应的，这也就是说从 n 个不同元素中的可重复组合的个数共有 C_{n+r-1}^r 种。

实际上 n 个不同元素中的可重复组合的个数对应着关于 $z_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的不定方程

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$$

非负整数解的个数，所以这个方程的非负整数解的个数正好是 C_{n+r-1}^r 个！

另一方面我们可以考虑关于 $z_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的不定方程

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$$

正整数解的个数，我们变换上面的方程为

$$(z_1 - 1) + (z_2 - 1) + \cdots + (z_n - 1) = r - n$$

于是正整数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 对应着非负整数 $t_1 = z_1 - 1, t_2 = z_2 - 1, \cdots, t_n = z_n - 1$，而非负整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 共有 $C_{n+(r-n)-1}^{r-n} = C_{r-1}^{r-n} = C_{r-1}^{n-1}$ 个。

3.4 距离组合

从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中取出 r 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，对任意的 $1\le i\ne j\le r$ 要求 $|x_i-x_j|>m$，其中 m 是不大于 n 的正整数，则共有多少种取法？事实上我们假设 $x_1<x_2<\cdots<x_r$，考虑 $y_1=x_1,y_2=x_2-m,\cdots,y_r=x_r-m$，于是组合 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 与组合 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 是一一对应的，并且组合 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 个数实际上就是从 $n-(r-1)m$ 个元素中无重复的选取 r 个元素，也就是组合数 $C^r_{n-(r-1)m}$。

3.5 练习

练习 3.5.1. 计算方程 $x_1+x_2+x_3+3x_4+3x_5+5x_6=7$ 的非负整数解的个数。

练习 3.5.2. 数列 a_n 共有 100 项，$a_1=0,a_{100}=475$，且 $|a_{k+1}-a_k|=5$，求满足这种条件的不同数列的个数。

练习 3.5.3. $A\bigcup B\bigcup C=\{a,b,c,d,e,f\},A\bigcap B=\{a,b,c,d\},c\in A\bigcap B\bigcap C$，计算不同的三元组 (A,B,C) 的个数。

练习 3.5.4. $A\bigcup B=\{1,2,\cdots,10\},|A|=|B|$，计算不同的二元组 (A,B) 的个数。

练习 3.5.5. 设 n 是正整数，把男女乒乓球选手各有 $3n$ 人配成男双，女双，混双各 n 对，每名选手均不兼项，计算配对方式的总数。

练习 3.5.6. 设 $i_1,i_2,\cdots,i_6$ 是 $1,2,3,4,5,6$ 的任意排列，要求任意三个相邻的数之和不能被 3 整除，计算满足这样条件的排列的个数。

练习 3.5.7. 用 4 种颜色给一个正八面体染色，要求相邻的面 (有公共棱的面) 不同色，计算不同染色方法的种数。

练习 3.5.8. 证明：$\sum\limits_{j=1}^{n} jC_n^j=n2^{n-1}$。

练习 3.5.9. 证明：$\sum\limits_{j=1}^{n} j^2C_n^j=n(n+1)2^{n-2}$。

练习 3.5.10. 证明：$\sum\limits_{j=0}^{n}(C_n^j)^2=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$。

排列组合

1. 排列数、组合数：$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ，$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

2. 从n个元素中选取r个进行排列（放回）：n^r

3. 不全相异的全排列：

   n个元素分为k组，每组元素相同，记n_j为第j组元素个数

   若n个元素相异，则有 n! 种情况，其中重复的情况：

   $n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!$（即$\{l_1, l_2, l_3\}$，$\{l_1, l_3, l_2\}$，$\{l_2, l_1, l_3\}$等情况）

   ∴ 全排列个数为 $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

4. 多组组合

   将n个不同元素分成k组，第j组有n_j个元素

   第1组 n_1
   第2组 n_2
   ⋮
   第k组 n_k

   分为k步：

   $\underset{1}{C_n^{n_1}} \cdot \underset{2}{C_{n-n_1}^{n_2}} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots$

   ∴ 第j步：$C_{n-\sum_{i=1}^{j-1} n_i}^{n_j}$

   ∴ 总个数 $= C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \cdots \cdot C_{n-\sum_{i=1}^{k} n_i}^{k}$

   $= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\underbrace{(n-n_1-\cdots-n_k)!}_{0!=1}}$

   $= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

5. 可重复组合

   从n~~中~~个不同元素中放回选取r个元素（不~~是选取r次，目的是把x_1~x_r全选出至少一遍~~）（并不是）

   （和n^r那种情况不同的是，这是无序的。如（1，1，2，3）和（1，2，1，3）在n^r的情况视为不同，但在此情况下视为相同）

   ① 不妨设 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_r$ ，（在均不取等时为无重复组合）

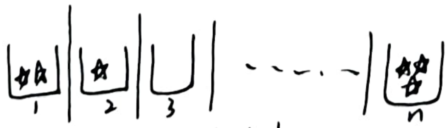
   令 $y_1 = x_1$，$y_2 = x_2 + 1$，…，$y_r = x_r + r - 1$，则 $y_1 < y_2 < \cdots < y_r$为无重复组合

   这些 $y_i \le n+r-1$ ∴ $y_1 \sim y_r$ 即为 $n+r-1$ 中选取r个的无重复组合

   由于原组合 C_x 与新组合 C_y 一一对应，所以个数为

   C_{n+r-1}^{r}

   ② 用组合的方法：将n个元素视为n个隔间，向隔间里共放入r个☆，中间有隔板。



   有r个☆，n−1个隔板，总共为 n+r−1 个，对其自由排列：

   如 ☆☆|☆||……，☆||☆|☆☆|||，…

   ∴ 总个数为 C_{n+r-1}^{r}（在n+r−1个空位上，选取r个空位放☆）

   ③ 代数的结论：即不定方程 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r$ 非负整数解个数有C_{n+r-1}^{r}个。

~~这也有两种角度来看~~：那我们考虑另一个问题，$z_1+z_2+\cdots+z_n=r$ 正整数解个数

(1) 代数方法：$\because z_1+z_2+\cdots z_n=r$，$z_i\geq 1$ $\therefore z_i-1\geq 0$

$\therefore$ 即为 $(z_1-1)+(z_2-1)+\cdots+(z_n-1)=r-n$，记 $t_i=z_i-1$，

即求 $t_1+t_2+\cdots+t_n=r-n$ 的非负整数解个数

$\therefore$ 根据之前所得结论，个数为 $C_{n+(r-n)-1}^{r-n}=C_{r-1}^{r-n}=C_{r-1}^{n-1}$

(2) 组合方法：类似于之前的~~电~~和隔板。

6. 距离组合

从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选取 r 个不同数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，且 $\forall 1\leq i\neq j\leq r$，有 $|x_i-x_j|>m$，

其 m 为~~大~~不大于 n 的正整数，则共有多少取法？

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_r$，令 $y_1=x_1$，$y_2=x_2+m$，$\cdots$ $y_r=x_r+(r-1)m$

$\therefore$ $y_2-y_1>m$，$y_3-y_2>m$，$\cdots$，$y_r-y_{r-1}>m$

（好，他发现他写反了，他在用 $x_1\sim x_r$ 无重复组合生成距离组合，实际上似乎也行，但不有点奇怪，所以还是正着写一遍。）

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_r$，令 $y_1=x_1$，$y_2=x_2-m$，$\cdots$ $y_r=x_r-m$

$\therefore$（我感觉还不对，应该是 $y_2=x-m$，$y_3=x-2m$，$y_r=x_r-(r-1)m$）

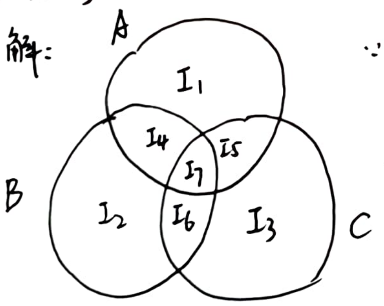
$\therefore$ $x_1\sim x_r$ 与~~可~~ $y_1\sim y_r$ 的无重复组合一一对应，且 $y_1\sim y_r$ 之间的差无限制

~~又~~ 即有 $y_r\leq n-(r-1)m$ $\therefore$ 即为从 $n-(r-1)m$ 中选 r 个无重元素

$\therefore$ 为 $C_{n-(r-1)m}^{r}$

Ex. 3.5.3

解：



$\because$ $c\in I_7$

$a,b,d\in I_4$ 或 I_7

~~只~~ $e\in I_1$ or I_2 or I_3 or I_5 or I_6

f 同 e

$\therefore$ 共 $2^3\times 5^2=200$ 种