Informal Notes on Mathematics

2023.01.16

函数补充练习：

Юйю дийцзие ке мей лей，суойи цон 2.2.9 кайши.

2.2.9. 解：$\because f\circ f = id_A$

$\therefore$

$X = \{1, 2, \cdots, i, \cdots, j, \cdots, 10\}$

$f\downarrow$ $\quad id_A$

$X = \{1, 2, \cdots, i, \cdots, j, \cdots, 10\}$

$f\downarrow$

$X = \{1, 2, \cdots, i, \cdots, j, \cdots, 10\}$

令 f_n 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中满足条件个数，~~先求 f_{n-1}~~

$\{1, 2, \cdots, n-1\}$

情形(1)：$f(1) = 1$

$S_n = \{1, 2, \cdots, n\} \xrightarrow{f} S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$

此时满足的个数为 f_{n-1}（即对 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 同样处理）

情形(2)：$f(1) = 2$ $\quad\therefore f(2) = 1$

$S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$

$f\downarrow$ $\quad \Rightarrow$ 1, 2 已固定，

$S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ $\quad\therefore$ 个数为 f_{n-2}

情形(3)：$f(1) = 3$

1° $S_n = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$

$f\downarrow$ $\quad \Rightarrow$ 个数为 f_{n-3}

$S_n = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$

2° $S_n = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$

$f\downarrow$ $\quad \Rightarrow$ 个数为 f_{n-4}

$S_n = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$

$$\therefore f_{10} = f_9 + f_8 + f_7 + f_6 = 2f_8 + 2f_7 + 2f_6 + f_5$$
$$= 4f_7 + 4f_6 + 3f_5 + 2f_4 = 8f_6 + 7f_5 + 6f_4 + 4f_3$$
$$= 15f_5 + 14f_4 + 12f_3 + 8f_2 = 29f_4 + 27f_3 + 23f_2 + 15f_1$$

又 $\because f_1 = 1$，$f_2 = 2$，$f_3 = f_2 + f_1 + f_1 = 4$

$f_4 = f_3 + f_2 + f_2 = 8$

（ $\{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ 1° $1 \mapsto 1 \Rightarrow f_3$

$\downarrow$ $\quad$ 2° $1 \mapsto 2$，$2 \mapsto 1 \Rightarrow f_2$

$\{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ 3° $1 \mapsto 3$，$3 \mapsto 1 \Rightarrow f_1 + f_1$ ）

$$\therefore f_{10} = 29 \times 8 + 27 \times 4 + 23 \times 2 + 15 = 401$$

2.2.10. 解：① $x=y=0 \Rightarrow f(f(0))+f(0)=f(0) \Rightarrow f(f(0))=0$

② $x=0,\ y=1 \Rightarrow f(f(1))+f(0)=f(1)+f(0) \Rightarrow f(f(1))=f(1)$

③ Мейтин, щуямань я цимсы щуяче.

当 $f(y)=y$ 时，令 $x=0$，则有：

$f(f(y))+f(0)=f(y)+y\cancel{\times}f(0)$

$\therefore f(0)=0$ 或 $y=1\ (f(1)=1)$

情形(1)：$f(0)\neq 0 \quad \therefore f(1)=1 \quad \therefore D=\{1\}$

$\therefore$ 当 $y=1$ 时，$f(x+f(x+1))+f(x)=x+f(x+1)+f(x)$

$\therefore x+f(x+1)=1$

$f(x+1)=1-x$

$f(x)=2-x$，经检验成立

情形(2)：$f(0)=0$

1° $\because f(0)=0$ 且 $yf(0)=f(0)$ 对于 $y\in\mathbb{R}$ 成立 $\therefore D=\mathbb{R}$

$\therefore f(x)=x$，经检验成立

2° $yf(0)=f(0)$ 不对 $\mathbb{R}$ 成立，下面应证明此情况不成立（似乎）

以下情况基于 $f(0)=0$ 分析：

④ $y=-1,\ x\in R \Rightarrow f(x+f(x-1))+f(-x)=x+f(x-1)+(-f(x))$

$\therefore x+f(x-1)\in D \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数

⑤ 当 $x=-y$ 时，$f(x+f(0))+f(-x^2)\cancel{x}=f(0)+x-xf(x)$

$\therefore f(x)+f(-x^2)=x-xf(x)$

⑥ 当 $x=y$ 且将 x,y 交换位置，有 $f(-x)+f(-x^2)=-x+xf(-x)$

⑦ 当 $x=1,\ y\in\mathbb{R}$ 时，$f(1+f(y+1))+f(y)=f(y+1)+1+yf(1)$

$\because$ 由(1)知，$f(y+1)+1\in D \quad \therefore f(y)=f(1)y$ ✗

实际上应该说明如下：

$f(0)=0 \Rightarrow -1=-1+f(-1+1)$ 是不动点，

这样是用(1)的结论，并意味着

$f(0)=0 \Rightarrow f(x)=x$

若 $D\neq\mathbb{R}$，则应有 $f(1)\neq 1$

但由④知，$2f(-1)=-1+f(-1)$，$f(-1)=-1$

$\therefore$ 结合⑤，有 $2f(1)=1-f(-1)=2$，$f(1)=1$，与 $D\neq\mathbb{R}$ 矛盾

$\therefore f(0)=0 \Rightarrow f(x)=x$ 又 $\because f(0)\neq 0 \Rightarrow f(x)=2-x$

$\therefore$ 只可能为此两种情况，即 $f(x)=x$ 或 $f(x)=2-x$

（因为没听课，所以后大半是自己写的，猜老师思路是真的难，中间还是有些不连贯的地方。）

2.2 补充练习

练习 2.2.1. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且对一切实数 x,y 均有

$$f(xy)+f(y-x)\geq f(x+y).$$

证明对一切实数 x 恒有 $f(x)\geq 0$。

练习 2.2.2. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[0,1]$ 上，且 $f(0)=f(1)$。对一切 $0\leq x_1\neq x_2\leq 1$ 均有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|.$$

证明 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$。

练习 2.2.3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}_{\neq 0}$。对任意非零实数 x,y 均有

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。解不等式 $f(x)+f(x-\dfrac{1}{2})\leq 0$。

练习 2.2.4. 设 k,l,m 为实数，且 $m\neq 0$，函数 $f(x)=k+\dfrac{m}{x-l}$ 的图像为曲线 C_1，函数 $g(x)$ 的图像是曲线 C_2，C_1 与 C_2 关于直线 $y=x$ 对称。如果点 $(1,2),(2,3),(2,4)$ 在 C_1 或者 C_2 上，计算 $f(k+l+m)$。

练习 2.2.5. 设 a,b,c 均为实数，$f(x)=ax^2+bx+c$，证明对一切整数 n，$f(n)$ 都为整数的充要条件是 $2a,a+b,c$ 均为整数。

练习 2.2.6. 设 $f(x)$ 是函数，对任何实数 x,y,z 恒有

$$\frac{1}{3}f(xy)+\frac{1}{3}f(xz)-f(x)f(yz)\geq\frac{1}{9}.$$

计算 $\sum\limits_{i=1}^{100}[if(i)]$，其中 $[\cdots]$ 是 *Gauss* 函数。

练习 2.2.7. 设 $f(x)$ 严格单调递增，并且其图像与函数 $g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称。x_1,x_2 分别为方程 $f(x)+x=2$ 和 $g(x)+x=2$ 的解，计算 x_1+x_2。

练习 2.2.8. 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{Z}_{>0}$ 上，且 $3|f(1)$，

$$f(n+1)=\begin{cases}\sqrt{f(n)}, & \sqrt{f(n)}\in\mathbb{Z}\\ f(n)+3, & \sqrt{f(n)}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

证明 f 是有界函数。

练习 2.2.9. 设 $X=\{1,2,\cdots,9,10\}$，函数 $f:X\to X$ 满足 $f\circ f$ 为恒等函数，并且对任意 $k\in X$ 都有 $|f(k)-k|\leq 2$。计算满足要求的 f 的个数。

练习 2.2.10. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任何实数 x,y 均有

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x).$$