# Informal Notes on Mathematics

2023.01.17

今天来补一些之前没听的题。

函数补充练习

2.2.1 解：$f(0)+f(0)\geqslant f(0)$

$f(0)\geqslant 0$ ✗

$x\in R$, $y=0$时，$f(0)+f(-x)\geqslant f(x)$

这样做似乎不行。

既然要证一般性，不妨构造一般性的相应的 $x, y$，即对于每个$x_0$特定的 $x, y$

如果让 $y-x$ 等 $x+y$ $\Rightarrow x=0$，无一般性

让 $xy=x+y$，则有 $y=\frac{x}{x-1}$，那么 $y-x=\frac{x}{x-1}-\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{2x-x^2}{x-1}$

令 $x'=\frac{2x-x^2}{x-1}$ $\Rightarrow x^2+(x'-2)x-x'=0$，$\Delta=x'^2-4x'+4+4x'=x'^2+4>0$

∴ 对于某个数$x'$，总有对应的$(x,y)$ 使得 $x'=y-x$ 且 $xy=x+y$

∴ $f(x')+f(xy)\geqslant f(x+y)$ $\Rightarrow$ $f(x')\geqslant 0$，$\forall x'\in \mathbb{R}$

∴ 得证。（其实证明$\frac{2x-x^2}{x-1}$值域为R也行。）

2.2.2 解：若 $x_2-x_1\leq\frac{1}{2}$，则显然；

若 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，则　　不妨设 $x_2>x_1$

$$
\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)| \\
&\leq |f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)| \\
&< |x_1-0|+|1-x_2| \\
&= 1-(x_2-x_1) \\
&< \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

∴ 得证。

2.2.3 解：$f(1)=2f(1)\Rightarrow f(1)=0$，$f(1)=2f(-1)\Rightarrow f(-1)=0$

∴ $f(-x)=f(x)+f(-1)=f(x)$　∴ $f(x)$为偶函数

∵ 在$(0,+\infty)$上↑　∴ 在$(-1,0)\cup(0,1)$上，$f(x)<0$，

∴ 在$[-\frac{1}{2},0)\cup(0,1]$上，不等式显然成立

不妨把$x$、$x-\frac{1}{2}$全部变为相应的绝对值，这样只要绝对值较大的那个函数值$\leq 0$即可（否则一定不成立，因为$f$在$(0,+\infty)$上↑）　并不是，这句话成立仅当$|f(x)|$↑

i $|x|\leq|x-\frac{1}{2}|$ $\Rightarrow x\leq\frac{1}{4}$　∴ $f(|x-\frac{1}{2}|)\leq 0$

∴ $|x-\frac{1}{2}|\in(0,1]$ $\Rightarrow x\in[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{4}]$

ii $|x|>|x-\frac{1}{2}|$ $\Rightarrow x>\frac{1}{4}$　∴ $f(|x|)\leq 0$

∴ $|x|\in(0,1]$ $\Rightarrow x\in(\frac{1}{4},1]$

∴ 就是$[-\frac{1}{2},0)\cup(0,1]$ ✗

应该由 $f(|x|)+f(|x-\frac{1}{2}|)\leq 0$ 得 $f(|x(x-\frac{1}{2})|)\leq 0$

∴ $x^2-\frac{1}{2}x\in[-1,0)\cup(0,1]$

∴ $x\in\{x\mid-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\leq x\leq\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，且 $x\neq 0,\frac{1}{2}\}$

2.2.4 解: ∵ $C_1$、$C_2$ 关于 $y=x$ 对称，$(1,2),(2,3),(2,4)\in C_1\cup C_2$

∴ $(2,1)$，$(3,2)$，$(4,2)\in C_1\cup C_2$

i 若 $(2,4)\in C_1$，则 $(4,2)\in C_2$，$(2,3)\in C_1$，$(2,1)\in C_2$，$(1,2)\in C_1$，$(3,2)\in C_1$

$$\therefore\begin{cases}4=k+\frac{m}{2-l}\\ 2=k+\frac{m}{1-l}\\ 2=k+\frac{m}{3-l}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l=2\\ m=0\\ k=2\end{cases}$$

∴ $f(k+m+l)=f(4)=2$ ∵ $m\neq 0$ ∴ 舍

ii 若 $(4,2)\in C_1$，则 $(2,4)\in C_2$

1° $(2,3)\in C_1$，$(3,2)\in C_2$，$(2,1)\in C_2$，$(1,2)\in C_1$

$$\therefore\begin{cases}2=k+\frac{m}{4-l}\\ 3=k+\frac{m}{2-l}\\ 2=k+\frac{m}{1-l}\end{cases}\Rightarrow \text{无解。}$$

∴ $\cancel{f(k+m+l)=f(\ \ )=}$

2° $(2,3)\in C_2$，$(3,2)\in C_1$，$(2,1)\in C_2$，$(1,2)\in C_1$

$$\begin{cases}2=k+\frac{m}{4-l}\\ 2=k+\frac{m}{3-l}\\ 2=k+\frac{m}{1-l}\end{cases}\Rightarrow m=0\text{，舍}$$

3° $(2,3)\in C_2$，$(3,2)\in C_1$，$(1,2)\in C_2$，$(2,1)\in C_1$

$$\begin{cases}2=k+\frac{m}{4-l}\\ 2=k+\frac{m}{3-l}\\ 1=k+\frac{m}{2-l}\end{cases}\Rightarrow \text{无解。}$$

算了，这玩意怎么这么怪。

原题似乎是 $(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$
照我这样算似乎确实无解。

Чжень тама ю шеньме дабин, малагэбацзид я суань лэ и шаньбу доу ушие цзиегуо ши цженьд.

2.2.5 解: ($\Rightarrow$) $f(0)=c\in\mathbb{Z}$

又∵ $f(1)=a+b+c\in\mathbb{Z}$ ∴ $a+b\in\mathbb{Z}$

又∵ $f(2)=4a+2b+c=2a+2(a+b)+c\in\mathbb{Z}$ ∴ $2a\in\mathbb{Z}$

($\Leftarrow$) $f(n)=a(n^2-n)+(a+b)n+c$

$=2a\frac{n^2-n}{2}+(a+b)n+c$

∵ $n\in\mathbb{Z}$ ∴ $n(n-1)\in 2\mathbb{Z}$ ∴ $\frac{n^2-n}{2}\in\mathbb{Z}$

∴ $f(n)\in\mathbb{Z}$

2.2.6 解: $\frac{2}{3}f(1)-f^2(1)\geq\frac{1}{9}\Rightarrow(f(1)-\frac{1}{3})^2\leq 0\Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}$

∴ $\frac{2}{3}f(x)-f(x)f(1)\geq\frac{1}{9}\Rightarrow f(x)\geq\frac{1}{3}$

当 $x,y=-1,z=1$，$\frac{2}{3}f(-1)-f^2(-1)\geq\frac{1}{9}\Rightarrow f(-1)=\frac{1}{3}$

当 $x=1$，$y,z\in\mathbb{R}$，$\frac{1}{3}f(y)+\frac{1}{3}f(z)-\frac{1}{3}f(yz)\geq\frac{1}{9}$

$\Rightarrow f(x)+f(y)\geq\frac{1}{3}+f(xy)$

∴ $f(x)+f(-1)\geq\frac{1}{3}+f(-x)\Rightarrow f(x)\geq f(-x)$，同理 $f(-x)\geq f(x)$

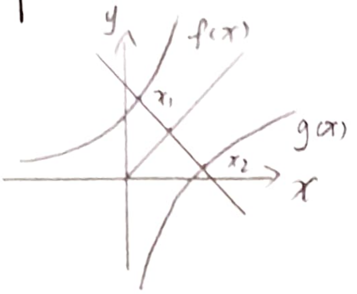
∴ $f(-x)=f(x)$

$x=y$，$z=1$时，$\frac{2}{3}f(x)-f^2(x)-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}f(1)\geq\frac{1}{3}f(x^2)+\frac{1}{3}f(x)-f^2(x)\geq\frac{1}{9}$

∴ $f(x)\leq\frac{1}{3}$ ∴ $f(x)=\frac{1}{3}$，$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{100}[i f(i)] = \sum_{i=1}^{100}\left[\tfrac{1}{3}i\right] = \left[\tfrac{100}{3}\right]\times\left(\left[\tfrac{100}{3}\right]-1\right)\div 2\times 3+\left[\tfrac{100}{3}\right]$$
$$= \frac{33\times 32}{2}\times 3+33$$
$$= 1617$$

2.2.7 解：




$x_1+x_2$
$= 2\times 1$
$= 2$

2.2.8 解： 设 $f(1)=3k$ $\quad\therefore f(3k^2-k)\le 3k+9k^2-3k=9k^2$

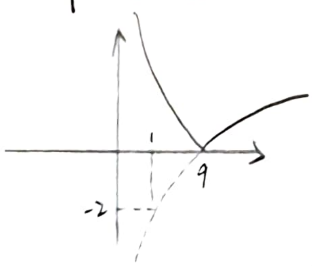
当 $n=3k^2-k$ 时，$f(n)=3k=f(1)$，周期性变化

$\therefore f(n)\in[3k, 9k^2]$，（最大值不超过$9k^2$）

$\therefore f$ 有界。

函数练习

2.1.14 解：画图可知：




$2-\log_3 a = 2(2-\log_3 b)$
$\log_3 b^2-\log_3 a = 2$
$b^2 = 9a$
$\because f(b)=f(c)$
$\therefore 2-\log_3 b = \log_3 c-2$
$\therefore \log_3 bc = 4$，$bc=81$
$\therefore \frac{ac}{b} = \frac{bc}{9} = \frac{81}{9} = 9$

2.1.15 解：$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=k$

$\therefore x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3-k=0$

$\therefore a=-(x_1+x_2+x_3)$, $b=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

$\therefore a^2-2b = x_1^2+x_2^2+x_3^2 \ge x_1^2+(x_1+1)^2+(x_1+2)^2$

$|a|+|2b|\ge$

$\boxed{问题保留}$

Суаньлэ. Бугуо шуолай, дан я цзуо чже даоти ши, я цзеньмэ е мей щяндао Чжетяньд яньщуе шихоу я цзян цзаоюй шеньмэ янд бущцин. На ненькэнен ши чанцзи удфа цуаоцуд цуаншан. Щянцзай я рен уей ижи щиньтон.

—— Added on 2.18, 2023

集合补充练习

1.5、12 解：~~31×31=961，33×33~~

$x, y \in A$，则 $2023 \le x+y \le 3033$

$\therefore$ 其中完全平方数有 2104，2401，2500，2601，2902

若把A划分成为 B、C，$B \cap C = \varnothing$，不妨设 $1011 \in B$

$\therefore$ $1083, 1380, 1489, 1580, 1881 \in C$

$\therefore$ 不对不对，先列个方程

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2601 \\ x_1 + x_2 = 2401 \\ x_2 + x_3 = 2902 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1351 \\ x_2 = 1050 \\ x_3 = 1852 \end{cases}$$

$\therefore$ $x_1, x_2, x_3$ 中定有两个被分到同一个集合

$\therefore$ 该集合含有完全平方数

$\therefore$ 得证。