Informal Notes on Mathematics

2023.01.18

1、14位同学，n个课题组，每组6个，每人至少参加2个，任2组至多有2个共同同学，求n最大值

解：设第i位同学为x_i，第j个课题组为A_j，$i, j = 1, 2, 3 \cdots$

设每个同学参加的课题组个数分别为$z_1, z_2, \cdots, z_{14}$

$\therefore\ z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{14} = 6n$

x_1参加z_1个课题组，设为$A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_{z_1}}$，

则三元组(x_1, A_j, A_k)个数为$C_{z_1}^2$

同理，对$x_1 \sim x_{14}$，我们有：

三元组(x_i, A_j, A_k)总数 $= \sum_{n=1}^{14} C_{z_n}^2$

~~都不对~~，ugaocblyore.

又说没问题了

任意两个课题组至多有2个共同同学

$\therefore$ 每个(A_j, A_k)至多对应2个(x_i, A_j, A_k)

$\because (A_j, A_k)$共有C_n^2组

$$\therefore 有\ 2C_n^2 \geqslant \sum_{m=1}^{14} C_{z_m}^2 = \sum_{m=1}^{14} \frac{z_m(z_m-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{14} z_m^2 - \sum_{m=1}^{14} \frac{z_m}{2}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{14}(z_1 + \cdots + z_{14})^2 - 3n$$

$$= \frac{1}{28}(6n)^2 - 3n$$

$\|$

$n(n-1) \geqslant$

$\therefore\ n \leq 7$，等号成立当且仅当每个(A_j, A_k)对应2个三元组且$z_1 = z_2 = \cdots = z_{14}$

列举得：$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A_2 = \{1, 2, 7, 8, 9, 10\}$，

$A_3 = \{3, 4, 7, 8, 11, 12\}$，$A_4 = \{11, 12, 5, 6, 9, 10\}$，$A_5 = \{13, 14, 1, 2, 11, 12\}$

$A_6 = \{13, 14, 3, 4, 9, 10\}$，$A_7 = \{5, 6, 7, 8, 13, 14\}$

组合数学

Ex 3.5.1

$x + y + z = 7$

解：设$x = x_1 + x_2 + x_3$，$y = 3x_4 + 3x_5$，$z = 5x_6$

$\therefore\ y \in \{0, 3, 6\}$，$z = \{0, 5\}$

i $x = 7, y = 0, z = 0 \Rightarrow C_{3+7-1}^7 = C_9^7 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$

ii $x = 4, y = 3, z = 0 \Rightarrow C_{3+4-1}^4 \times C_{1+2-1}^1 = 15 \times 2 = 30$

iii $x = 1, y = 6, z = 0 \Rightarrow C_{1+3-1}^1 \times C_{2+2-1}^2 = 3 \times 6 = 18$

iv $x = 2, y = 0, z = 5 \Rightarrow C_{3+2-1}^2 = 6$

$\therefore$ 共$36 + 30 + 18 + 6 = 90$种

Ex. 3.5.4

解：$\because |A| = |B|$，$|A \cup B| = 10$　　$\therefore\ 5 \leq |A| \leq 10$，令$|A| = k$，$k = 5, 6, \cdots, 10$

$|A| = k = |B|$，$|\bar{A}| = 10 - k$，　$\bar{A} \subseteq B$

$\therefore$ 当A中元素确定时，即可确定B中$10-k$个元素，剩余$2k-10$个需从A中选

$\therefore$ 总个数 $= C_{10}^5 \times 1 + C_{10}^6 \times C_6^2 + C_{10}^7 \times C_7^4 + C_{10}^8 \times C_8^6 + C_{10}^9 \times C_9^8 + C_{10}^{10}$

$= 5167$

Ex. 3.5.8

证明: $\sum_{j=1}^{n} j C_n^j = \sum_{j=1}^{n} j \frac{n!}{j!(n-j)!} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}$

$= \sum_{j=1}^{n} \frac{n\cdot(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} = n\sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1}$

$= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}$

$= n(1+1)^{n-1}$

$= n2^{n-1}$

Ex. 3.5.9

证明: $\sum_{j=1}^{n} j^2 C_n^j = \sum_{j=1}^{n} jn\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} = \sum_{j=1}^{n} jn C_{n-1}^{j-1}$

$= n\sum_{k=0}^{n-1} \cancel{j}(k+1) C_{n-1}^{k}$

$= n\sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^{k} + n2^{n-1}$

$= n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$

$= (n+\frac{n^2-n}{2})2^{n-1}$

$= n(n+1)2^{n-2}$

$=$

Ex. 3.5.10

证明: 构造母函数: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n$

$(1+\frac{1}{x})^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{x} + \cdots + C_n^n\frac{1}{x^n}$

$\therefore (1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$

其常数项为所求之 $\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2$

$\because \frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$ 常数项应当为 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 前系数

$\therefore \sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2 = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Ex. 3.5.5

解: 选出2n个选手有 C_{3n}^{2n} 种 ~~这2n个人全排列为(2n)!，这n组两两对打，在此过程中被重复算了2^n次，~~

~~当2n个对手被视为n组，(1,2)和(2,1)被视为2组，以此方式重复了n!次~~

~~∴男双配对有~~

从3n个男选手中选2n个，为 C_{3n}^{2n} 种，把这2n个人进行全排列，两两一组，如:

(1,2), (3,4), (5,6) 和 (2,1), (3,4), (6,5)

可发现这n组实际排列顺序并不影响，因此除以n!; (1,2), (2,1)被多算一次，因此除以2^n

∴男双: $C_{3n}^{2n}\frac{(2n)!}{n!2^n}$ 　同理女双为 $C_{3n}^{2n}\frac{(2n)!}{n!2^n}$

又: 混双显然为 $n!$

∴共 $(C_{3n}^{2n}\frac{(2n)!}{n!2^n})^2 n!$ 种

Helly定理：若n个凸集任三个交集非空，则这n个集之交也非空

要求：闭集、有界，否则在无限步后将变为空集

例1：考虑集族 $\{A_j \mid j\in N^*,\ A_j=(0,\frac{1}{j})\}$

例2：考虑集族 $\{A_j \mid j\in N^*,\ A_j=[j,+\infty)\}$

思路都是设 $a\in\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$，根据a构造个集合 A_k 使得 $a\notin A_k$，从而表明 $\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j=\varnothing$

复数：

1、复数的模：$|a|=\sqrt{a\cdot\overline{a}}=\sqrt{a^2+b^2}$

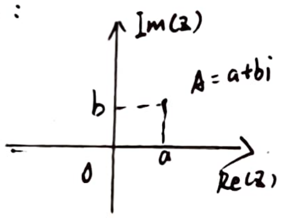
2、复数恒等式：$(\alpha-\beta)(\theta-\eta)+(\alpha-\eta)(\beta-\theta)=(\alpha-\theta)(\beta-\eta)$

证明：左边 $=\alpha\theta-\beta\theta-\alpha\eta+\beta\eta+\alpha\beta-\alpha\theta-\beta\eta+\theta\eta$

$=\alpha\beta-\alpha\eta-\beta\theta+\eta\theta$

$=(\alpha-\theta)(\beta-\eta)$

3、复平面：



复数的加法同向量的加法

但复数相乘后仍是向量（复数）