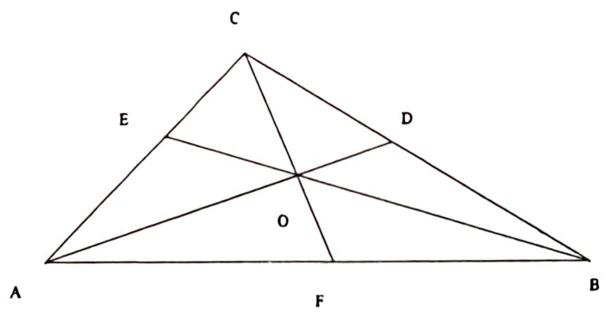
5 平面几何 (一)

在这一章，我们将接触 $\mathbb{R}^2$ 上的 Euclid 几何也就是我们熟知的平面几何的内容。我们先描述平面几何中一些重要的定理，当然平面几何里面的定理有很多，这里只列举一些较为著名的定理，我们只验证原命题。

定理-公式 5.0.1. *(Ceva 定理) 对 ΔABC 所在的平面上的任何一点 O，连接 AO,BO,CO 并延长它们，与三角形的各边或者各边的延长线分别交于点 D,E,F，则*

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

并且逆定理也成立，其逆定理经常被用来证明三条直线交于一点的问题。



证明. 我们只证明一种情形。简单的说，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{S_{\Delta OBD}}{S_{\Delta OCD}}$，所以

$$\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta ACO}}=\frac{S_{\Delta ABD}-S_{\Delta OBD}}{S_{\Delta ACD}-S_{\Delta OCD}}=\frac{BD}{DC}.$$

类似的，我们得到，

$$\frac{S_{\Delta BCO}}{S_{\Delta BAO}}=\frac{CE}{AE},\frac{S_{\Delta ACO}}{S_{\Delta BCO}}=\frac{AF}{BF}.$$

所以

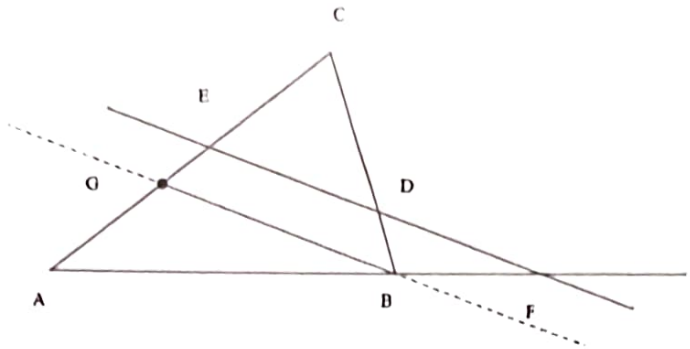
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta ACO}}\cdot\frac{S_{\Delta BCO}}{S_{\Delta BAO}}\cdot\frac{S_{\Delta ACO}}{S_{\Delta BCO}}=1.$$

在延长线上情况也是类似的。同样的可以证明其逆定理。 □

定理-公式 5.0.2. *(Menelaus 定理) 如果一条直线与 ΔABC 各边 BC,CA,AB 分别交于 D,E,F 则*

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}=1.$$

并且逆定理也成立，其逆定理经常被用来证明三点共线问题。



证明. 我们只证明一种情形。过 B 点作 DE 的平行线交 AC 于 G 点。于是

$$\frac{CD}{DB}=\frac{CE}{GE}, \frac{BF}{AF}=\frac{GE}{AE},$$

所以

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CE}{GE}\cdot\frac{GE}{AE}=1.$$

其余情况也可类似证明。逆定理同样正确。 □

定理-公式 5.0.3. *(Ptolemy 定理) 圆内接四边形 $ABCD$ 中、两条对角线的乘积 (两对角线所包矩形的面积) 等于两组对边乘积之和 (一组对边所包矩形的面积与另一组对边所包矩形的面积之和)，即*

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$

Ptolemy 定理的逆也是真，表述为：一个凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积，则这个凸四边形内接于某圆。

证明. 过 B 点作 BG 交 AB 于 G 点，使得 $\angle ABC=\angle DBG$，又因为 $\angle BDG=\angle ACB$，所以 $\Delta ABC\sim\Delta GBD$。所以

$$\frac{AC}{GD}=\frac{CB}{DB}\Rightarrow AC\cdot DB=GD\cdot CB.$$

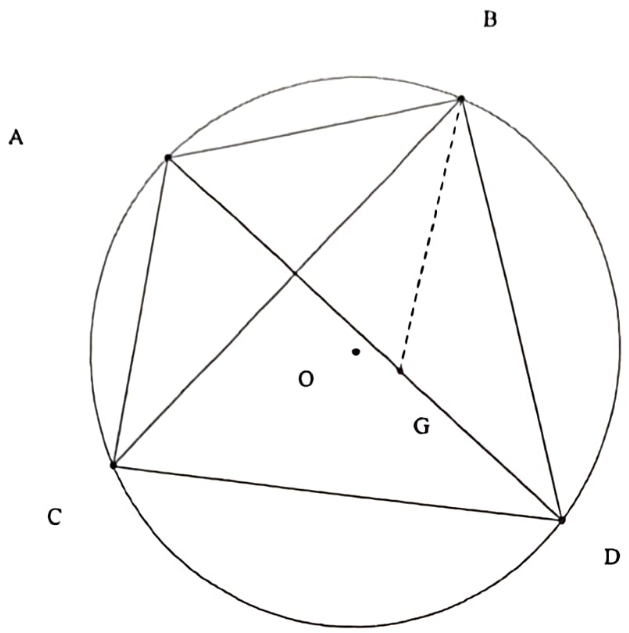
类似的因为 $\angle ABG=\angle CBD, \angle BAG=\angle BCD$，所以 $\Delta BAG\sim\Delta BCD$，从而

$$\frac{AB}{CB}=\frac{AG}{CD}\Rightarrow AB\cdot CD=CB\cdot AG,$$

所以我们得到

$$AC\cdot DB+AB\cdot CD=GD\cdot CB+CB\cdot AG=CB\cdot AD.$$

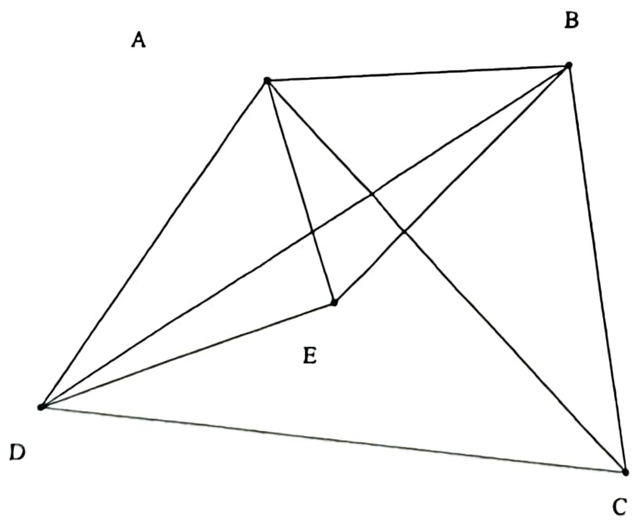
□



定理-公式 5.0.4. *(广义 Ptolemy 定理)* 平面上任何凸四边形 $ABCD$ 中，恒有 $AC\cdot BD \le AB\cdot CD + AD\cdot BC$. 等式成立当且仅当这个凸四边形 $ABCD$ 内接于某圆，也就是 Ptolemy 定理和其逆。

证明. 在复平面上证明这件事非常简单。令 A,B,C,D 各顶点处的位置为复数 a,b,c,d. 复数恒等式给出 $(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=(a-c)(b-d)$，两边取模后再使用三角不等式即得答案。

$(a-b)(c-d)$ 实为模长为 $AB\cdot CD$ 的向量
$(a-d)(b-c)$ 同理，模长为 $AD\cdot BC$
$(a-c)(b-d)$ 模长为 $AC\cdot BD$
+ 是向量运算，因此对于模长有不等式：
$|(a-b)(c-d)|+|(a-d)(b-c)|$
$\geq |(a-c)(b-d)|$



如果没学过复数，作 ΔABE 使得 $\angle BAE=\angle CAD, \angle ABE=\angle ACD$，

连接 DE、所以

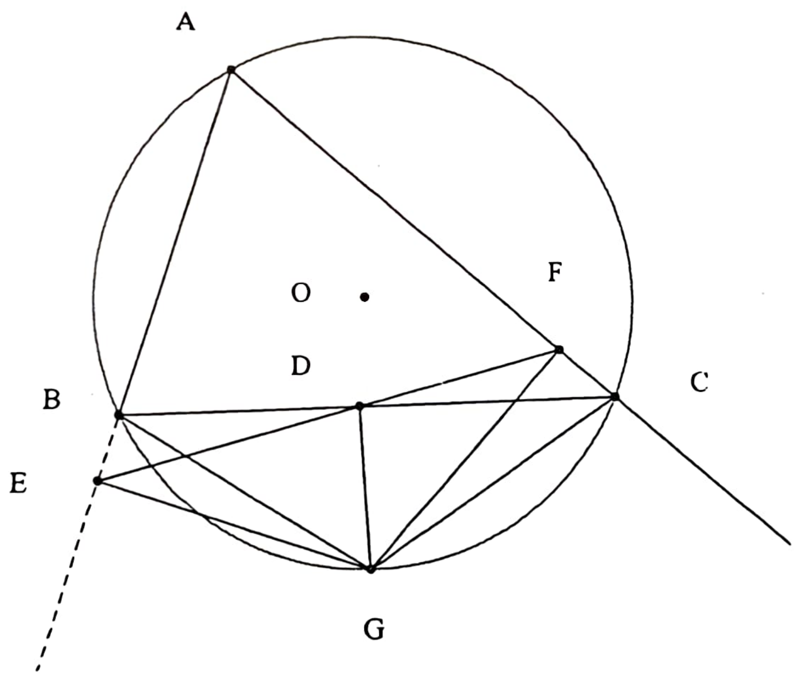
$$\Delta ABE \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}=\frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}, AB{\cdot}CD = AC{\cdot}BE.$$

但是 $\angle BAC = \angle EAD$，连同上面的最后一个等式一起给出

$$\Delta ABC \sim \Delta AED \Rightarrow \frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{ED} \Rightarrow AC\cdot ED = AD\cdot BC.$$

所以 $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BE + AC\cdot ED \geq AC\cdot BD$。 □

定理-公式 5.0.5. *(Simson 定理) 过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边或其延长线的垂线，则三垂足共线。(此线常称为 Simson 线) Simson 定理的逆也是真的。Simson 定理经常被用来证明一些点共线，应用这个定理的关键在于寻找合适的三角形。*



证明. 设 D,E,F 分别为定理中的垂足。连接 DE,DF,GC,BG，由

$$GE \perp AE, GF \perp AF$$

所以 A,E,G,F 四点共圆，同样的 G,D,F,C 也四点共圆，也同样的 G,E,B,D 四点共圆，我们得到

$$\angle ACG + \angle GDF = \pi,$$

$$\angle ACG + \angle ABG = \pi,$$

$$\angle ABG + \angle EBG = \pi,$$

$$\angle EDG = \angle EBG,$$

所以

$$\angle EDG + \angle GDF = \pi,$$

即 E, D, F 共线。 □

定理-公式 5.0.6. *(Euler 定理)* ΔABC 的外心、重心、垂心分别为 O, G, H，则 O, G, H 三点共线，并且 $OG = \frac{1}{2}GH$。O, G, H 的连线被称为 *Euler* 线。

并且外接圆半径 R 和内切圆半径 r 与圆心距 d 之间有 *Euler* 公式 (几何)：

$$R^2 - d^2 = 2Rr.$$

因此我们得到欧拉不等式：等号成立当且仅当原先的三角形是正三角形

$$R \geq 2r.$$

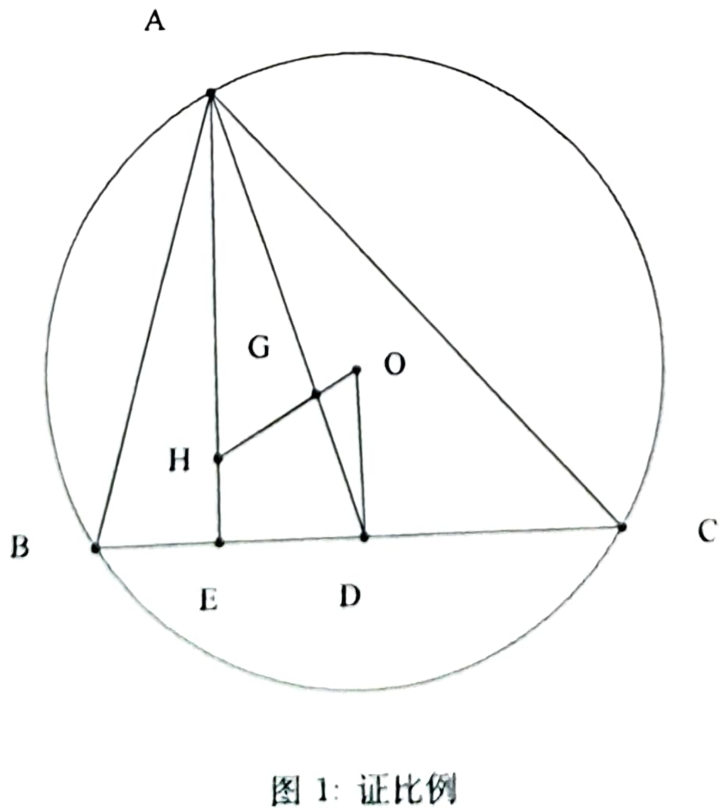


图 1: 证比例

证明. 先证明共线的情况下确实有

$$OG = \frac{1}{2}GH.$$

如图 1 所示，其中 D 为 BC 中点，AE 是 BC 的高。因为 G 是重心，而重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2，于是

$$\frac{GA}{GD} = 2.$$

同时因为 $OD \perp BC$，$AE \perp BC$，于是 $AE // OD$，这给出 $\Delta AGH \sim \Delta DGO$、原先的比例给出

$$OG = \frac{1}{2} GH.$$

我们来证明 O, G, H 三点共线，如图 2 所示，D 为 BC 中点，E 为 AB 中点，AT 是 BC 上的高，CS 是 AB 上的高，连接 OH 交 AD 于 N 点。因为中位线 $DE // AC$，而 $OE \perp AB, OD \perp BC$，所以 $\Delta AHC \sim \Delta DOE$，所以

$$\frac{1}{2} = \frac{DE}{AC} = \frac{DO}{AH},$$

而显然 $\Delta NAH \sim \Delta NDO$，于是

$$\frac{AN}{DN} = \frac{AH}{DO} = 2.$$

这个比例正好说明了重心 $G = N$(重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2)，即三点共线。

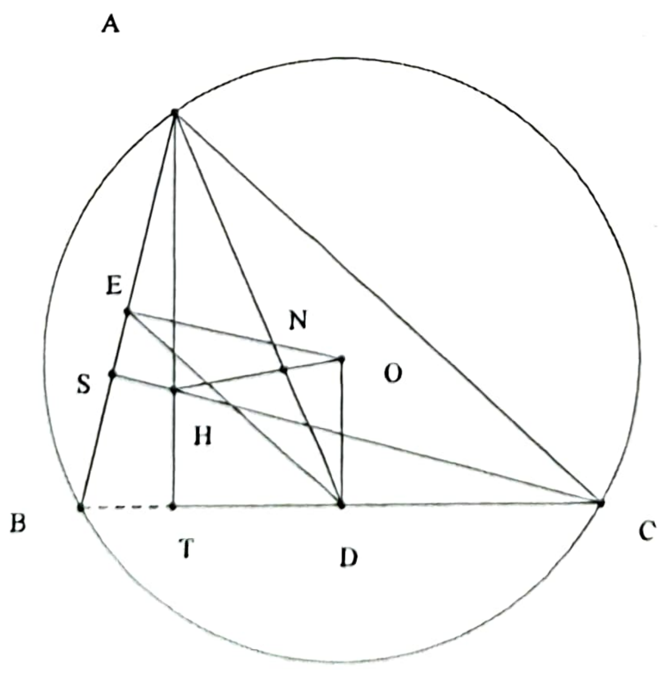


图 2: 证三点共线

最后我们来证明 Euler 公式。当 $d=0$ 时候显然为正三角形，且 $R=2r$，下面设 $d>0$。如图 3 所示，O 为外接圆圆心，S 为内切圆圆心，延长 AS 交外接圆于 N 点，因为 $\angle BAC$ 被 AN 平分，N 为弧 BC 的中点。作 SD 垂直于 AB 于点 D，连接 NO 并延长交外接圆于 M 点，连接 SO 并延长交外接圆于 P,Q，连接 BN,BM。于是

$$\Delta ADS\sim\Delta MBN\Rightarrow\frac{SD}{NB}=\frac{AS}{MN}\Rightarrow AS\cdot NB=SD\cdot MN=2rR.$$

注意，

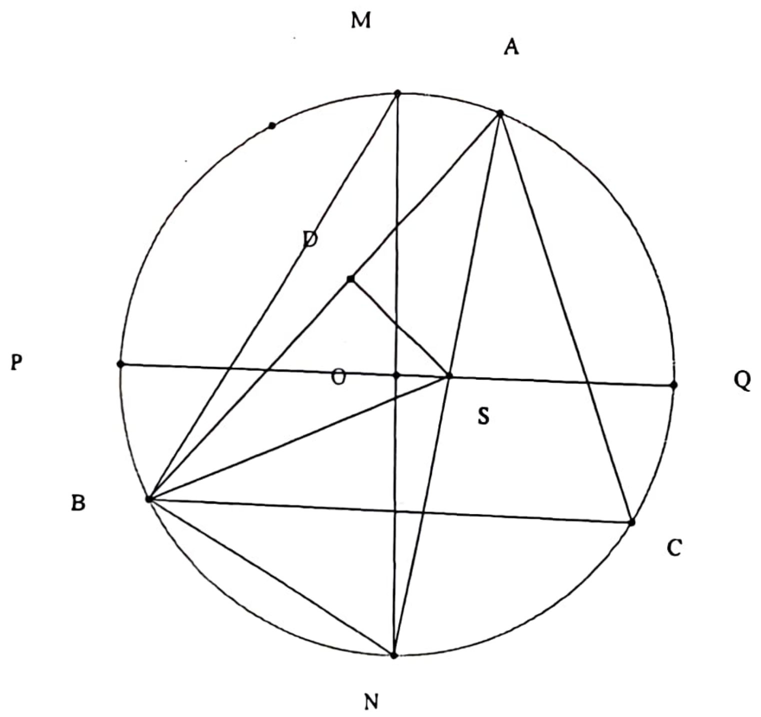


图 3: 证 Euler 公式

$$\angle SBN=\angle SBC+\angle NBC=\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle BAC}{2},$$
$$\angle BSN=\angle ABS+\angle BAS=\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle BAC}{2},$$

这给出 $BN=SN$，从而

$$(R-d)(R+d)=SQ\cdot SP=AS\cdot SN=2rR,$$

因此得到

$$R^2-d^2=2rR.$$

而从上方的等式看出 Euler 不等式是显然的。 □