第二次课

4. 复合函数的导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

例17. $y = [\ln(\cos^2 x^2)]^2$

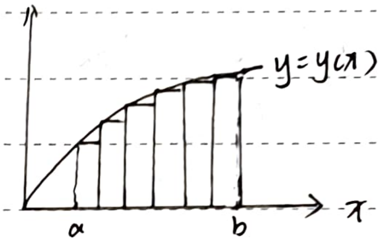
解: $y' = 2\ln(\cos^2 x^2) \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2\cos x^2 \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$

$= -8x\ln(\cos^2 x^2) \cos^2 x \sin^2 x \frac{1}{\cos^2 x^2}$

第二节 积分

1. 黎曼和

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$



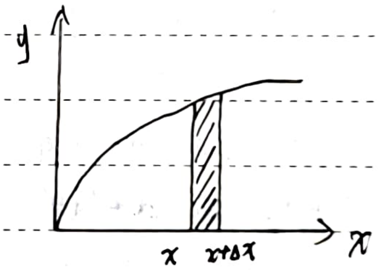
2. 定积分

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

the definite integral from a to b of function f(x)

微积分第一定律

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)\, dt = f(x)$$



3. 不定积分

$F(x) = \int f(x)\, dx$, 有 $F'(x) = f(x)$

$\int f(x)\, dx$ 称为 $f(x)$ 的不定积分

$F(x)$ 可称为 $f(x)$ 的原函数

4. 牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

例1. 已知原长为 l_0 的弹性系数为 k 的弹簧，其线密度为 λ，求其自重引起的伸长 l

解: 先将其放平: 

首先对于并联弹簧, 有 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$

对于串联弹簧，$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}$

题中弹簧可视为小弹簧串联，把其分割为若干个Δx

∴有$\frac{l_0}{\Delta x}$个。∴ $\frac{1}{k}=\frac{l_0}{\Delta x}\cdot\frac{1}{k_0}$

$k_0=\frac{l_0}{\Delta x}k$

∴ x段弹簧的重量拉取Δx段弹簧，伸长量为

$$\frac{x\cdot\lambda g}{k_0}=\frac{\lambda g}{kl_0}x\cdot\Delta x$$

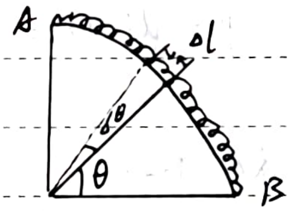
$$\therefore\ l=\frac{\lambda g}{kl_0}\sum_{i=1}^{N}x_i\Delta x_i\Big|_{N\to\infty}$$

$$=\frac{\lambda g}{kl_0}\int_0^{l_0}x\,dx$$

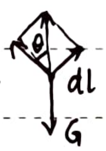
$$=\frac{\lambda g l_0}{2k}$$

例2：一半径为R的$\frac{1}{4}$光滑球面放在水平面上，其上放一条光滑均匀铁链，其A端固定在球面顶点，B端恰与桌面不接触，铁链线密度为λ，求A端拉为力F。

（λ→线密度，σ→面密度，ρ→体密度）



解：



$$dF=mg\cos\theta$$

$$=\lambda dl\,g\cos\theta$$

又∵ $dl=R\,d\theta$

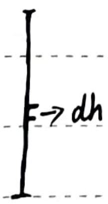
$$\therefore\ F=\lambda Rg\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\lambda Rg\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)$$

$$=\frac{\lambda}{2}Rg$$

例3：有一只MUHTAH从地面沿杆向上爬，其速度v和离地高度关系为$v=\frac{lv_0}{l+h}$。其中$l=2mm$，$v_0=2mm/s$，求其上爬2cm所用时间。

解：



$$t=\int dt$$

$$=\int\frac{dh}{v}$$

$$=\int\frac{l+h}{lv_0}dh$$

$$=\frac{1}{lv_0}\left(\frac{h^2}{2}+lh\right)\Big|_0^{20}$$

$$=60\ s$$

例4：一质点做初速为0的直线运动，其加速度随位移变化：$a = a_0 + kx$，求物体通过位移s_0时速度。

解：$\int dv = \int a\,dt \quad \left(a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v\right)$

$\because a = \frac{dv}{ds}v = a_0 + ks$

$\therefore v\,dv = (a_0 + ks)\,ds$ ⟹ 分离变量

$\therefore \int_0^v v\,dv = \int_0^{s_0}(a_0+ks)\,ds$ (Πlaǔ gao la)

$\therefore \frac{v^2}{2} = \frac{k}{2}s_0^2 + a_0 s_0$

$v = \sqrt{2a_0 s_0 + k s_0^2}$

第三节 微分方程

1. 微分

函数的无穷小变化量

$$dy = df(x) = f'(x)\cdot\Delta x\big|_{\Delta x\to 0} = f'(x)\,dx$$

2. 微分方程

含导数或微分的方程，如

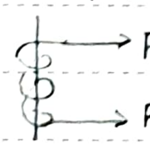
$$dy = x^2 dx,\quad \frac{dy}{dx} = x^3,\quad f''(x) + 2f'(x) - 3 = 0$$

微分方程解为函数。

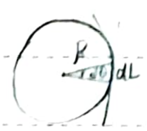
3. 分离变量法

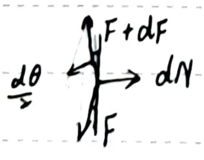
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int\frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)\,dx$$

例2. 轻绳与木桩间…为μ，把轻绳绕树3圈，在B端施一拉力F_0，求A端拉动的最小力F



解：$dL = R\,d\theta$ 对 dL 受力分析：





$dF = \mu\,dN$

把F和dF+F合成.

$\therefore dN = (2F + dF)\sin\frac{d\theta}{2}$

$= F\,d\theta$

$\therefore \quad dF = \mu dN = \mu F d\theta$

$\frac{dF}{F} = \mu d\theta$

$\therefore \int \frac{dF}{F} = \int \mu \, d\theta$

$\ln F = \mu\theta + C$

$\because \theta = 0$ 时， $F = F_0$ （初值）

$\therefore F = F_0 e^{\mu\theta} \quad (e^{\mu \times 0 + C} = F_0 \Rightarrow e^C = F_0)$

(加条件 $\mu = 0.5$)，$\because \theta = 6\pi$

$\therefore F/F_0 \approx 1.24 \times 10^4$

例5. 证明：一质量分布均匀的球壳对球壳内任一质点万有引力为0

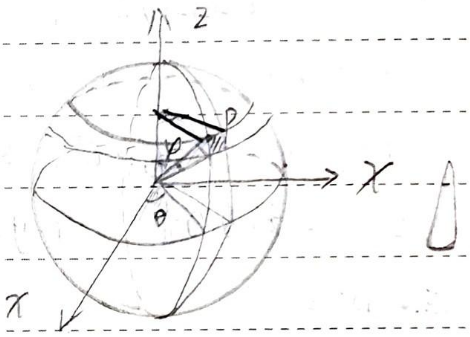
立体角：(1) 球面对球心所张的立体角

$\Delta\Omega = \frac{S}{r^2}$

(2) 球坐标系

$P(r, \theta, \varphi)$

(3) 球坐标中的立体角



$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{R^2}$

$\Delta S = R^2 \sin\varphi \, \Delta\varphi \, \Delta\theta$

$\therefore \Delta\Omega = \sin\varphi \, \Delta\varphi \, \Delta\theta$

整个球面：$\Omega = 4\pi$ sr $\quad dV = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$

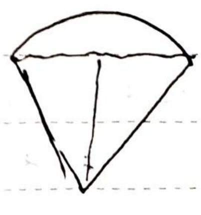
(4) 任意曲面的立体角

把空间曲面投影到球面上。

$d\Omega = \frac{Prj_R \, d\vec{S}}{R^2}$

? 闭合曲面对内部点所张立体角为 4π，对外部点所张立体角为0

(5) 立体角和平面角的关系



$\Omega = \frac{2\pi R h}{R^2} = 2\pi (1 - \cos\frac{\theta}{2})$

$= 4\pi \sin^2\frac{\theta}{4}$

任取一向量$\vec{r}$（任意很重要），则有

$$((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{r} = (\vec{c}\times\vec{r})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= (\vec{c}\times\vec{r})\cdot\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{r})\cdot\vec{b}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{r} + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{r}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{r}$$

∵ $\vec{r}$是任意的　∴ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$

由叉乘分配律，$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$$= 0 - a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_z b_y \vec{i} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} + 0$$

十分繁琐。为此引入行列式：

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

= 红线上积之和 − 蓝线上积之和

另一种计算方法（所有阶都通用）→代数余式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots$$

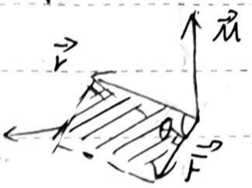
·力矩

1、力矩：力作用于物体，常能使物体转动，这时外力作用效果不仅取决于外力大小和方向，而且取决于外力作用线与轴的距离 —力臂。

力矩记作$\vec{M}$，☆ $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$

$M = r\cdot F\sin\langle\vec{r},\vec{F}\rangle$　面积单位为m·N

（最好不说N·m）

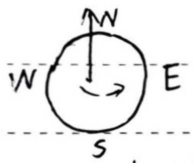


运动状态改变可以指速度大小方向 和 角速度，力矩(沿轴方向上的分量)

即表达示对~~线~~轴旋转的角速度的影响

角速度：角位移/时间

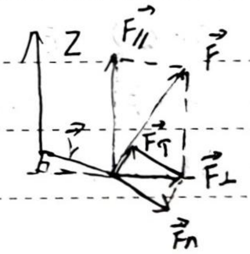
例：标出地球旋转角速度方向



（之所以向上，是因为角速度方向为叉乘后的向量）

(2) 力对定轴力矩的矢量形式

$\vec{M}_Z = \vec{r}\times\vec{F}_\perp = \vec{r}\times\vec{F}_T$



(3) 力对任意点的力矩，在通过该点的任一轴上的投影，等于该力对该轴的力矩

$\vec{M} = \vec{r}\times(\vec{F}_n+\vec{F}_T+\vec{F}_{//}) = \vec{r}\times\vec{F}_\perp = \vec{r}\times\vec{F}_T$

四种积：$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

混合积　　双叉乘

叉乘满足分配律（证明较难）

→ $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所成平行六面体体积

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

证明：（见下页）

（额，见上一页。图片顺序排错了）