多项式$\sum_{i=0}^{k} x^{in}$的因式分解问题

1. 引言

本文首先通过立方原根（primitive cubic root）证明了当多项式$x^{2n}+x^n+1$中n不等于3的倍数时，该多项式具有因式x^2+x+1。笔者同样尝试用了一种略复杂的方式直接进行因式分解来证明此结论。进一步地，笔者拓展了研究的范围，考虑了更一般形式的多项式$x^{kn}+x^{(k-1)n}+...+x^{2n}+x^n+1$。笔者再次利用原根探究结果，发现n不等于(k+1)的倍数时，多项式并不总是有一个因式$x^k+x^{(k-1)}+...+x^2+x+1$，否定了笔者一开始的猜想。

接着，笔者换了一个角度，通过绘制复平面中的根来研究这个问题，使用编程语言MATLAB进行辅助。笔者发现，当n不等于(k+1)的倍数时，所有的多项式$x^{kn}+x^{(k-1)n}+...+x^{2n}+x^n+1$都具有某些共同的实系数因子$P(x)$。最后，笔者把方程的根用复数的指数表达，发现了根的辐角的分布具有周期性，从而证明了上述结论。

2. $k=2$ 时的证明

Theorem 1 *($k=2$)*
多项式$x^{2n}+x^n+1$具有因式x^2+x+1,当且仅当$n\not\equiv 0 \bmod 3$

2.1. 原根法证明

Proof *由于$(x^2+x+1)(x-1)=x^3-1$，所以x^2+x+1的根为$\{\zeta,\zeta^2\}$，其中ζ是1的立方原根。*

对于ζ，我们有$(\zeta)^3=(\zeta^2)^3=(\zeta^3)^3=1$,$\zeta\neq\zeta^2\neq 1$

当$n\not\equiv 0 \bmod 3$ 时，$\{\zeta^n,\zeta^{2n}\}=\{\zeta,\zeta^2\}$，这表明$\zeta$和$\zeta^2$也是$x^{2n}+x^n+1$的根，因此多项式可被$x^2+x+1$整除。

另一方面，当$n\equiv 0 \bmod 3$ 时，$\zeta^n=\zeta^{2n}=1$，所以ζ,ζ^2不是$x^{2n}+x^n+1$的根。

2.2. 因式分解法证明

Proof *也可以从因式分解的角度来看待这个问题。我们试着用这个模板：*
$u^2+u+1=\frac{u^3-1}{u-1}$，其中$u\neq 1$。我们先来处理一些最基本的例子($n=2,3,4$)：

$n = 2$:

$$x^4 + x^2 + 1 = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^3)^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^3 - 1)\cdot(x^3 + 1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = (x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)$$

，其中$x^2 \neq 1$;

$n = 4$:

$$x^8 + x^4 + 1 = \frac{(x^4)^3 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x^3)^4 - 1}{x^4 - 1} = \frac{([x^3]^2 - 1)\cdot([x^3]^2 + 1)}{(x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1)} = \frac{(x^3 - 1)\cdot(x^3 + 1)\cdot([x^2]^3 + 1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2 + 1)}$$
$$= (x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)\cdot(x^4 - x^2 + 1)$$

，其中$x^4 \neq 1$;

对于这些多项式，我们能够使用平方差的形式写出每个商的分子。但是对于，

$n = 3$:

$$x^6 + x^3 + 1 = \frac{(x^3)^3 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^3 - 1)\cdot(x^6 + x^3 + 1)}{(x^3 - 1)}$$

，其中$x^3 \neq 1$，

我们无法使用平方差，这个多项式在 $\mathbb{R}$ 上是不可约的。
对于一般情况，我们实际上需要考虑n的奇偶性。

$n = 3m \pm 1 = 2p, 2p'$: (m为奇)

$$x^{4p} + x^{2p} + 1 = \frac{(x^{2p})^3 - 1}{x^{2p} - 1} = \frac{(x^{3p})^2 - 1}{x^{2p} - 1}$$
$$= (x^2 + x + 1)\cdot\frac{([x^3]^{p-1} + [x^3]^{p-2} + \ldots + x^3 + 1)\cdot(x^{3p} + 1)}{(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)\cdot(x^p + 1)},\ x^{2p} \neq 1$$

$2p'$情况同上。

$n = 3m$: (m为奇)

$$x^{6m} + x^{3m} + 1 = \frac{(x^{3m})^3 - 1}{x^{3m} - 1} = \frac{(x^{3m} - 1)\cdot([x^{3m}]^2 + x^{3m} + + 1)}{x^{3m} - 1}$$
$$= (x^{3m})^2 + x^{3m} + 1 = x^{6m} + x^{3m} + 1,\ x^{3m} \neq 1,$$

这只是返回原式，其在$\mathbb{R}$中不可约。

$n = 3m = 6q$: (m为偶)

$$x^{2n} + x^n + 1 = \frac{x^{3n} - 1}{x^n - 1} = \frac{(x^3)^n - 1}{x^n - 1}$$
$$= x^{12q} + x^{6q} + 1 = (x^{6q} + x^{3q} + 1)\cdot(x^{6q} - x^{3q} + 1),\ x^{6q} \neq 1,$$

分解出的两式由上一种情况的结论可知其不可被$x^2 + x + 1$整除。

$n=3m\pm 1$: (m为偶)

$$\begin{aligned}x^{2n}+x^{n}+1 &= \frac{x^{3n}-1}{x^{n}-1}=\frac{\left(x^{3}\right)^{n}-1}{x^{n}-1}\\ &=\left(\frac{x^{3}-1}{x-1}\right)\cdot\frac{\left(x^{3}\right)^{n-1}+\left(x^{3}\right)^{n-2}+\ldots+x^{3}+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}\\ &=\left(x^{2}+x+1\right)\cdot\frac{\left(x^{3}\right)^{n-1}+\left(x^{3}\right)^{n-2}+\ldots+x^{3}+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}, x^{n}\neq 1,\end{aligned}$$

以上四种情况即所有可能出现的情况，由此可得出欲证结论。

3. 推广结论的尝试

笔者在证明以上结论后，第一想法是能否将其推广至所有$k\geq 2$, 即对于多项式$\sum_{i=0}^{k}x^{in}=x^{kn}+x^{(k-1)n}+\ldots+x^{2n}+x^{n}+1$是否有类似的结论。

3.1. 用原根法进行尝试

笔者的第一个猜想是$\sum_{i=0}^{k}x^{i} \mid \sum_{i=0}^{k}x^{in} \Leftrightarrow n\not\equiv 0 \bmod (k+1)$，下面将用原根法证明这是不成立的。

Proof *由于*$(x^{k}+x^{k-1}+\ldots+x^{2}+x+1)(x-1)=x^{k+1}-1$，*所以* $x^{k}+x^{k-1}+\ldots+x^{2}+x+1$*的根为*$\{\zeta,\zeta^{2},\ \ldots,\zeta^{k}\}$,

对于ζ，*我们有*$(\zeta)^{k+1}=(\zeta^{2})^{k+1}=\ \ldots\ =(\zeta^{k+1})^{k+1}=1,\zeta\neq\zeta^{2}\neq\ \ldots\ \neq 1$

由原根的性质，$\{\zeta^{n},\zeta^{2n},\ \ldots,\zeta^{kn}\}=\{\zeta,\zeta^{2},\ \ldots,\zeta^{k}\}$ *当且仅当* $\gcd(n,k+1)=1$,*否则对于* $m=\dfrac{k+1}{\gcd(n,k+1)}$, *我们有*

$$\zeta^{mn}=\left(\zeta^{k+1}\right)^{\frac{n}{\gcd(n,k+1)}}=1\notin\{\zeta,\zeta^{2},\ \ldots,\zeta^{k}\}$$

由此可知原命题不成立。

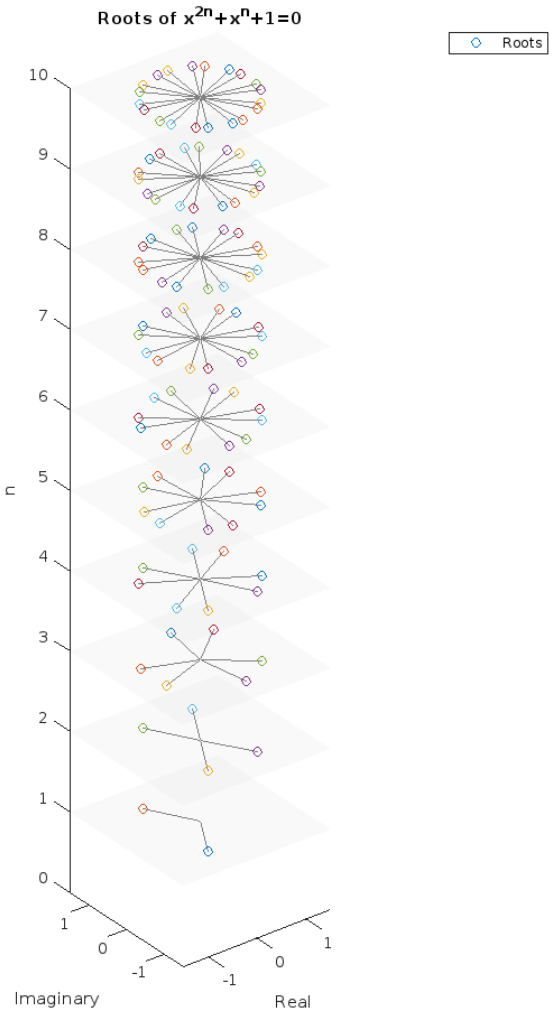
3.2. 在复平面上的尝试

为了找出正确的规律，笔者尝试在复平面上画出方程的根来进一步探究，为此使用MATLAB作为辅助，写了以下代码:

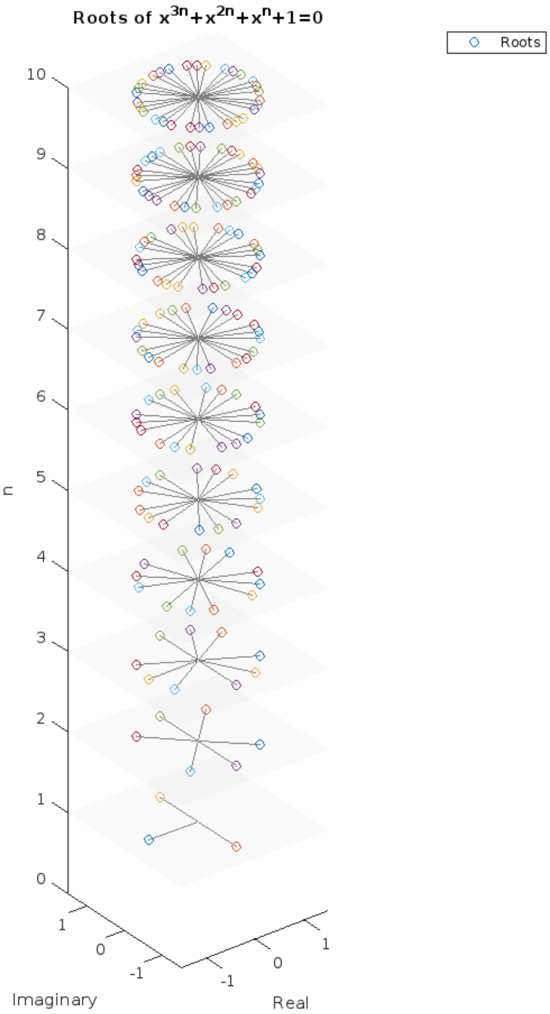
```
syms x
figure
for n = 1:10
```

```
    f=x^(2*n)+x^n+1;
    r=solve(f);
    r = vpa(r,8);
    r = double(r);
    for i = 1:length(r)
        plot3(real(r(i)),imag(r(i)),n,'o')
        theta = atan2(imag(r(i)), real(r(i)));
        line([real(r(i)) 0],[imag(r(i)) 0],[n n],'Color',[0.5
0.5 0.5])
        hold on
    end
end
for n = 1:10
    [X,Y] = meshgrid(-3:0.1:3);
    Z = ones(size(X))*n;
    surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha',0.1,'FaceColor',[0.8 0.8
0.8],'EdgeColor','none')
    hold on
end
daspect([1.5 1.5 1])
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 0 10])
xlabel('Real')
ylabel('Imaginary')
zlabel('n')
title('Roots of x^{2n}+x^n+1=0')
legend('Roots')
```

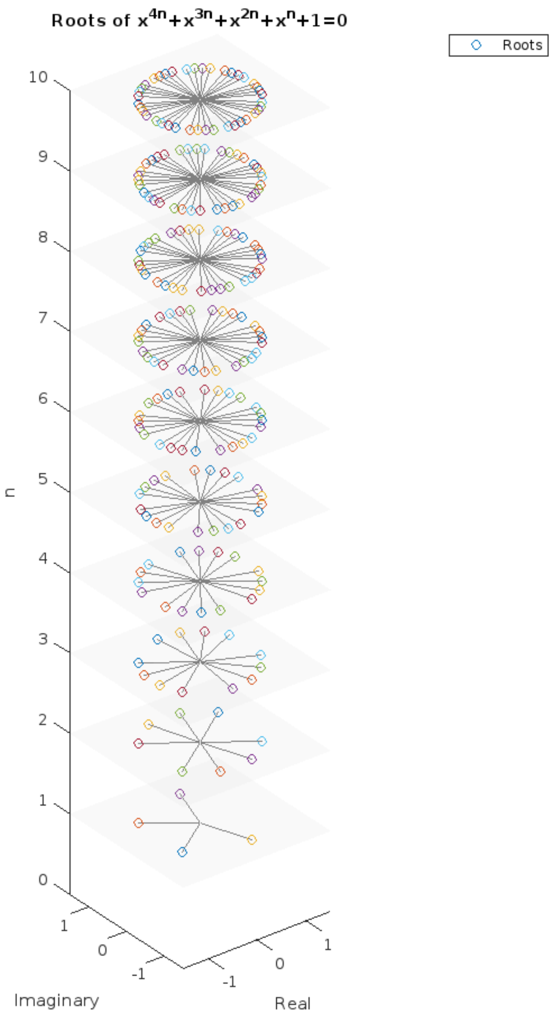
分别作出$k=2,3,4,5,\ n=1,2,\ \dots,10$的图像如下:

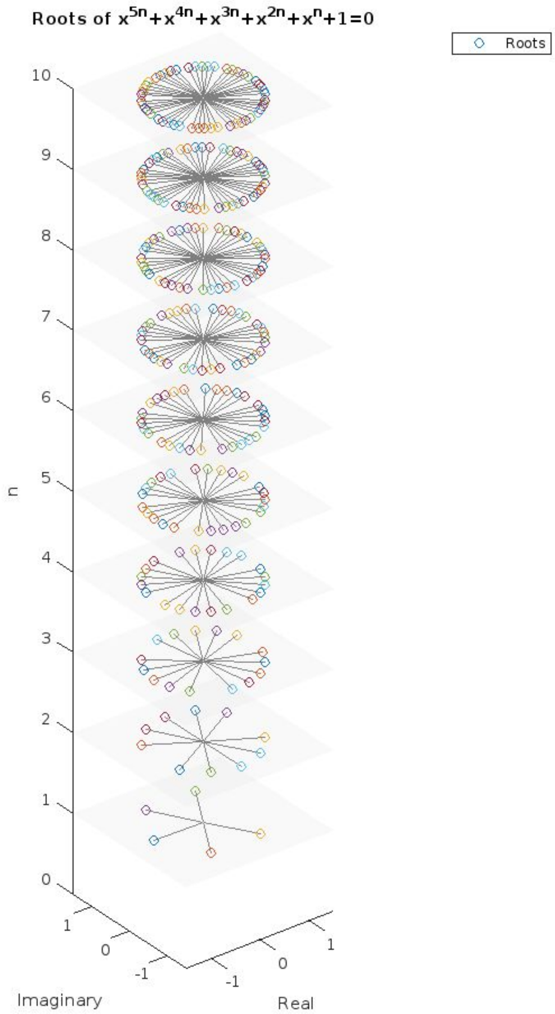


Roots of $x^{2n}+x^n+1=0$
Roots
n
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Imaginary
Real
-1
0
1



Roots of $x^{3n}+x^{2n}+x^n+1=0$
Roots
n
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Imaginary
Real
-1
0
1





观察这些根之间的辐角差，可发现其大小呈周期性变化，比如$k=2$时，两个角为一个周期，较大角是较小角的两倍，一个周期有一个大角一个小角，共n个周期；$k=3$时，三个角为一个周期，较大角仍是较小角的两倍，一个周期有一个大角两个小角，共n个周期。以此类推，在k的情况下，k个角为一个周期，较大角是较小角的两倍，一个周期有1个大角$(k-1)$个小角，共n个周期。根据此规律，可以用指数形式$re^{i\theta}$将所有根表示出来，随后证明这恰好是方程的根再推广结论即可。

4. 用复数法证明

Lemma 1
方程$x^{kn}+x^{(k-1)n}+\ldots+x^{2n}+x^{n}+1=0$之根为
$e^{2\pi ir/n}e^{2\pi im/(n(k+1))}$, $m=1,\ \ldots,k,\ r=0,\ \ldots,n-1$

Proof *根据代数基本定理，原方程应当有kn个根；而形如$e^{2\pi ir/n}e^{2\pi im/(n(k+1))}$, $m=1,\ \ldots,k,\ r=0,\ \ldots,n-1$的数恰有kn个，因此只要证明所有该形式的数都是方程的根即可。*

$$
\begin{aligned}
&x^{kn}+x^{(k-1)n}+\ldots+x^{2n}+x^n+1 \\
&=\left(e^{2\pi ir/n}e^{2\pi im/(n(k+1))}\right)^{kn}+\left(e^{2\pi ir/n}e^{2\pi im/(n(k+1))}\right)^{(k-1)n}+\ldots+\left(e^{2\pi ir/n}e^{2\pi im/(n(k+1))}\right)^{n}+1 \\
&=0
\end{aligned}
$$

命题得证。

Theorem 2

当$n\not\equiv 0 \bmod (k+1)$时，多项式$x^{kn}+x^{(k-1)n}+\ldots+x^{2n}+x^n+1$存在某些共同的实系数因子 $P(x)$

Proof

$$
\begin{aligned}
e^{2\pi ir/n}e^{2\pi im/(n(k+1))} &= e^{2\pi ir/n+2\pi im/(n(k+1))} \\
&= e^{(2\pi ir(k+1)+2\pi im)/(n(k+1))} \\
&= e^{\frac{r(k+1)+m}{n(k+1)}2\pi i}
\end{aligned}
$$

如果$\gcd(n,k+1)=d<n$，则上式包含了所有形如$e^{2\pi is/(k+1)}$，$s=1,2,\ \ldots,\frac{k+1}{d}$的数，则所有$e^{2\pi is/(k+1)}$，$s=1,2,\ \ldots,\frac{k+1}{d_{\max}}$都是原方程的公共根，这些数及其对应的共轭之积构成若干个实系数一次式，这些一次式中去掉$s=1$时的式子，剩余式子任意相乘即为满足条件的$P(x)$

注意，这只能说明存在实系数公因子，不代表是整系数，因此不代表原式总能通常意义上进行因式分解。对于什么时候存在整系数公因式，还需要进一步地探究。

5. 总结

本研究首先通过原根证明了当多项式$x^{2n}+x^n+1$中n不等于3的倍数时，该多项式具有因式x^2+x+1。我还尝试用了一种略复杂的方式直接进行因式分解来证明这个结论。接着，研究范围被拓展到更一般形式的多项式$x^{kn}+x^{(k-1)n}+\ldots+x^{2n}+x^n+1$，在此过程中我使用了原根法尝试，MATLAB辅助，最后通过复数得到了结论。

这次研究给我带来的启发是，在研究复杂的数学问题时，可以尝试使用多种方法来解决问题。例如，本研究中，我先使用了原根来证明多项式的因式分解，但是发现猜想并不成立，之后使用了绘制复平面中的根的方法，使用编程语言进行辅助，最终成功证明了问题。这教会我在学习和研究中不断尝试不同的方法，不放弃思考，可以更好地理解和解决问题。