Informal Notes on Mathematics
2023.02.05

第 4 章 函数的图像与变换

4.1 函数的图像与性质

4.1.1. 函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ 的图象的对称中心为 $(-2,3)$.

解：由 $x=-1,-2,-3$ 时无意义可猜测为 $(-2,a)$，代入检验：

$f(-2+x)+f(-2-x)$

$=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x-1}$

$=2+2+2=6$

$\therefore a=\frac{6}{2}=3$

$\therefore$ 关于 $(-2,3)$ 对称

4.1.2. 若函数 $f(x)=(x+a)\cdot(|x-a|+|x-4|)$ 的图象是中心对称图形，则 $a=$ $-\frac{4}{3}$.

解：$\exists b\in\mathbb{R}$，$f(b+x)+f(b-x)=2c$

$\therefore (x+b+a)(|x+b-a|+|x-4+b|)$

$=(x-b-a)(|x-b+a|+|x+4-b|)+2c$

易知 $a+b=0$，$b-a=4-b$ 为一种可能

$b=\frac{4}{3}$，$a=-\frac{4}{3}$，$c=0$

4.1.3. 若函数 $f(x)=\left(1-x^2\right)\left(x^2+ax+b\right)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f(x)$ 的最大值是 16 .

解：~~$f'(x)=-2x(x^2+ax+b)+(1-x^2)(2x+a)$~~

$\because$ 关于 $x=-2$ 对称

$\therefore$ ~~$f'(-2)=4(4-2a+b)+5(-4+a)$~~

~~$=16-8a+4b-20+5a$~~

~~$=4b-3a-4=0$~~

$\because$ ~~$f'(x)=0$ 有三解 x_1,x_2,x_3 且 $x_1x_2x_3=\frac{a}{4}$~~

$\therefore$ ~~$x_1+x_3=-\frac{a}{8}$ $\therefore$ $x_1(x_1+4)=\frac{a}{8}$~~

啊不对，不应该划掉。当我没划吧。

$\because f(1)=f(-1)=0$

$\therefore f(-3)=f(-5)=0$

$\therefore a=-(-3-5)=8$

$\therefore x_1^2+4x_1-1=0$

$\therefore x_1=-2-\sqrt{5},\ x_3=-2+\sqrt{5}$

$\therefore f(x)max=f(x_1)=(1-x_1^2)(x_1^2+8x_1+15)$

$=(-8-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}-16-8\sqrt{5}+15)$

$=-(8+4\sqrt{5})(8-4\sqrt{5})$

$=16$

4.1.4. 设笛卡儿平面上的点集 S 满足 $|||x|-2|-1|+|||y|-2|-1|=1$. 若由 S 组成的圆形是由厚度不计的绳子围成的，那么需要绳子的总长为 $a\sqrt{b}$，其中 a，b 为正整数，且 b 不能被任意素数的平方整除. 求 $a+b$.

解：一层层拆绝对值。

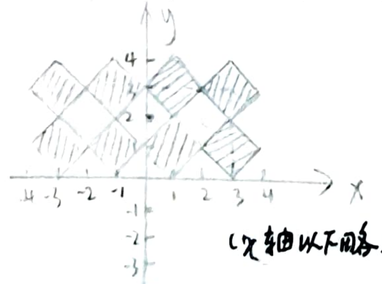
$x>0$，$y>0$ 时，

$||x-2|-1|+||y-2|-1|=1$

$x>2$，$y>2$ 时

$|x-3|+|y-3|=1$

为以 $(3,3)$ 为中心的曼哈顿正方形。



（x轴以下略）

加 $|x-2|$ 即图形关于 $x=2$ 对称，

加 $|y-2|$ 即关于 $y=2$ 对称

$|x-1|$，$|y-1|$ 即再根据 $x=1$，$y=1$ 对称

$|x|$，$|y|$ 即再根据 $x=0$，$y=0$ 对称

$\therefore$ 共16个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形

$\therefore S=64\sqrt{2}$

$\therefore a+b=66$

4. 1. 5. 设函数 $f(x)(x\in\mathbb{R})$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3$. 又函数 $g(x)=|x\cos(\pi x)|$，则函数 $h(x)=g(x)-f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 上的零点个数为（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解：~~$f(x)$ 以2为最小正周期~~

~~$g(x)$ 以2为……~~

~~$\therefore h(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 上…个数~~

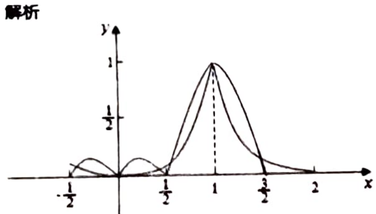
~~等价于 $h(x)$ 在 $[0,2]$ 上…个数~~

~~（证 $-\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,2$ 均不为零点）~~

~~$\therefore$ Хеньбущин, $f(0)=g(0)=0$~~

~~$\therefore h(x)$ 在 $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 上…=在 $[0,2]$ 上…~~

解析

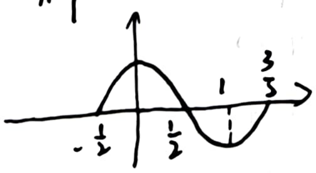


因为当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3$.
所以当 $x\in[1,2]$ 时 $2-x\in[0,1]$.
$f(x)=f(2-x)=(2-x)^3$，

当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$g(x)=x\cos(\pi x)$，
$g'(x)=\cos(\pi x)-\pi x\sin(\pi x)$；
当 $x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 时，$g(x)=-x\cos\pi x$，
$g'(x)=\pi x\sin(\pi x)-\cos(\pi x)$.
注意到函数 $f(x)$、$g(x)$ 都是偶函数，
且 $f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)=1$，
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$，
$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(2-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，
$g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$g(1)=1$，
$g'(1)=1>0$，
根据上述特征作出函数 $f(x)$、$g(x)$ 的草图，
函数 $h(x)$ 除了0、1这两个零点之外，
分别在区间 $[-\frac{1}{2},0]$，$\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$[\frac{1}{2},1]$，$\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 上各有一个零点.
共有6个零点，
故选 B

4. 1. 6. 设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的以 2 为周期的偶函数，在区间 $[1,2]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi)=1,f(2\pi)=0$，则不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant f(x)\leqslant 1\end{cases}$ 的解集为 $[2\pi-6,4-\pi]$.

解：$\because T=2$



$\therefore$ 关于 $x=1$ 对称

$\because$ 在 $[1,2]$ 上↓

$\therefore$ 在 $[0,1]$ 上↑

$\because f(2\pi)=0$　$\therefore f(2\pi-6)=0$

$f(\pi)=1$　$\therefore f(\pi-4)=1$

$\therefore f(4-\pi)=1$

$\therefore$ 解集为 $[2\pi-6,4-\pi]$

4.1.7. 已知函数 $f(x)=f(398-x)=f(2158-x)=f(3214-x)$ 对于所有实数 x 均成立，函数值列 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…，$f(999)$ 中最多有多少个不同的值？

解：$f(x)$ 关于 $x=199$，$x=1079$，$x=1607$，
$x=1278$，$x=1806$，$x=2686$ 对称

$\therefore T_{max}=(1278-1079)\times 2=199\times 2=398$

$\therefore f(0)=f(398)$

$f(999)=f(203+2\times 398)=f(203)$

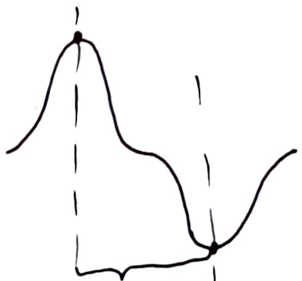
∴ 最多398个

不是。$1079-199=880$，$1607-1079=528$

$\gcd(880,528)=176$

$\therefore T=352$

∴ 最多177个值（如图）



可能不同的值
$(\frac{T}{2}+1)$

4.1.8. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(1)=\dfrac{1}{4}, 4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)(x,y\in\mathbf{R})$, 则 $f(2019)=$（ B ）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $-\dfrac{1}{4}$

解：$4f(0)^2=2f(0)$

若 $f(0)=0$

$\cancel{4f(-1)f(1)=f(0)+f(-2)}$

$4f(x)f(-x)=f(0)+f(2x)$

$4f(-x)f(x)=f(0)+f(-2x)$

$\therefore f(2x)=f(-2x)$

$\therefore f(x)$ 为偶

$4f(x)f(1)=f(x+1)+f(x-1)$

$f(x)=f(x+1)+f(x-1)$

$f(0)=f(-1)+f(1)=0$

$4f(0)f(x)=f(x)+f(-x)=0$

$\therefore f(x)$ 为奇，不可能

$\therefore f(0)=\frac{1}{2}$

$\cancel{\therefore f(x)+f(-x)=2f(x)}$

$4f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$

$=f(x)+f(y)$

$f(-1)=f(0)+f(-2)$，

$f(-2)=-\frac{1}{4}$

$\therefore f(1)+f(-2)=4f(-\frac{1}{2})f(\frac{3}{2})=0$

$\therefore f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})+f(-\frac{1}{2})$

$\therefore f(\frac{3}{2})=0$

$\therefore (\frac{3}{2},0)$ 为对称中心

$\therefore T=6$

$\therefore f(2019)=f(3)$

$=4f(\frac{3}{2})f(\frac{3}{2})-f(0)$

$=-\frac{1}{2}$