A Brief on Tensor

Let's start from vector.

Theorem: (vector triple product)

$$(u\times v)\times w \equiv (u\cdot w)v-(v\cdot w)u$$

Proof: $u\times v$ 之后 ⊥ 于 v、u 所在平面，再 $\times w$ 就又回到 $u\cdot v$ 所在平面

不妨设 $(u\times v)\times w = Au + Bv$

注意 $(u\times v)\times w$ 应当 $\perp (u\times v)$ 和 $\perp w$

$\therefore\ Au\cdot w + Bv\cdot w = 0$

$\therefore\ A = -C(v\cdot w)\ ,\ B = C(u\cdot w)$

这里的 C 是和 v、w、u 的有关的常数，设为 $C(u,v,w)$

$\therefore\ (u\times v)\times w = C(u,v,w)[(u\cdot w)v - (v\cdot w)u]$ (1)

下面只需证明 $C(u,v,w)\equiv 1$ 即可。

当 $u=w$ 时，

$(u\times v)\times u = C(u,v,u)[|u|^2 v - (u\cdot v)u]$

两边同时点乘 v

$(u\times v)\times u\cdot v = (u\times v)\cdot(u\times v)$ (混合积的轮换性)

$= C(u,v,u)[|u|^2|v|^2 - (u\cdot v)^2]$

$$\because\ (u\times v)\cdot(u\times v) = |u|^2|v|^2\sin^2\theta = |u|^2|v|^2(1-\cos^2\theta) = |u|^2|v|^2 - (u\cdot v)^2$$

$\therefore\ C(u,v,u) = 1 \longrightarrow$ (2)

在 (1) 两端同时点乘 u

$\therefore\ [u\times(u\times v)]\cdot w = C(u,v,w)[(u\cdot w)(v\cdot u) - (v\cdot w)|u|^2]$

又∵ 由 (2) 知，$[u\times(u\times v)]\cdot w = -[(u\times v)\times u]\cdot w$

$= [(u\cdot v)u - |u|^2 v]\cdot w$

$= (u\cdot w)(v\cdot u) - (v\cdot w)|u|^2$

$\therefore\ C(u,v,w) = 1$ □

Note: There's an algebra created by Grassman that gives meaning to $u\times v$ and $u\times v\times w$ in high dimensional Euclidean spaces where they're call <u>wedge products</u>

Note: 我真没听说过上面那玩意。我知道的 wedge product 是代拓里面的 $S^1\vee S^1$，感觉完全不是一个东西。 $\boxed{\text{问题保留}}$

Problem 1.3

找到一个单位向量 $\vec{c}$ 使其同时 $\perp \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}=(1,-2,3)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$，不得用叉积。

Solution：唔，问题抄错了。分别用叉积和不用叉积做一遍。

用叉积： $\vec{e} = \pm \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + (-3)\vec{j} + 0\vec{k} - 0\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$
$$= (-2, -4, -2)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore\ \vec{e} = \pm\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, \tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

不用叉积： 设 $\vec{e} = (x, y, z)$

$$\therefore\ \vec{e}\cdot\vec{a} = x - 2y + 3z = 0$$
$$\vec{e}\cdot\vec{b} = -x + z = 0$$
$$\therefore\ (x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, \lambda)$$
$$\because\ x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \therefore\ \lambda = \pm\tfrac{\sqrt{6}}{6} \quad \therefore\ \vec{e} = \pm\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, \tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

补充另一个看待混合积轮换的角度：

$$(u\times v)\cdot w = (u\times v)_x \cdot w_x + (u\times v)_y \cdot w_y + (u\times v)_z \cdot w_z$$
$$= \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

根据行列式两行交换符号改变，∴任意交换两次值不变

∴ 易得 $(u\times v)\cdot w = (w\times u)\cdot v = (v\cdot w)\cdot u$

好，下面我们进入张量（Tensor）。我觉得这本书有趣之处在于它引入得很好。

简单地说，高一阶张量就是对低一阶张量的一个作用，但是必须线性且send vectors to vector

一阶张量为向量，$v\cdot w$，$v\times w$ 中的 $v\cdot$、$v\times$ 都是作用，但 $v\times$ 是二阶张量，$v\cdot$ 不是。

（物理上的意义即应力和应变. the stress tensor 作用在垂直于平面、穿过某点的单位向量，把the force vector per area（作用在平面上的压力）传递到该点，Цжеугзой хуа шиугзай чан，я ганвугзое думай гуй，见 Exercise 1.20）

另一个简单的nontrivial的2nd tensor 就是投影向量

$$\mathrm{Proj}_u v = (v\cdot\hat{u})\cdot\hat{u}$$

显然满足send vector to vector. 下面验证其为线性。

证明：
$$\mathrm{Proj}_u(\beta v + \gamma w) = [(\beta v + \gamma w)\cdot\hat{u}]\hat{u}$$
$$= (\beta v\cdot\hat{u} + \gamma w\cdot\hat{u})\cdot\hat{u}$$
$$= \beta(v\cdot\hat{u})\hat{u} + \gamma(w\cdot\hat{u})\hat{u}$$
$$= \beta\,\mathrm{Proj}_u v + \gamma\,\mathrm{Proj}_u w \qquad \square$$

下面引入直积：

The direct product uv is a tensor that sends any vector w according to:

$$uv(w) = u\cdot(v\cdot w)$$

因此，我们有 $Proj_u(\vec{x}) = \hat{u}\hat{u}(\vec{x})$

可用直积表示的张量被称 dyads. 实际上，任何 2nd tensor 都是 dyads 的线性组合。

（我更喜欢用 $u \otimes v$ 表示直积，以后就按 $\otimes$ 写了）

对于 2nd tensor S 和 T，

$$S = T \iff Sv = Tv, \ \forall v$$

或等价地：

$$S = T \iff u\cdot Sv = u\cdot Tv, \ \forall u, v$$

zero tensor: $Ov = \vec{0}, \forall v$, identity tensor: $Iv = v, \forall v$

The <u>transpose</u> of a 2nd order tensor T is defined as that unique tensor T^T i.e.

$$u\cdot Tv = v\cdot T^T u, \ \forall u, v$$

A 2nd order tensor T is said to be:

(a) symmetric if $T = T^T$

(b) skew (or antisymmetric) if $T = -T^T$

(c) singular if $\exists\, v \neq 0$ such that $Tv = \vec{0}$

Property: $T = \frac{1}{2}(T+T^T) + \frac{1}{2}(T-T^T)$,

$T + T^T = (T+T^T)^T$ (symmetric)

$T - T^T = -(T-T^T)^T$ (skew)

Problem 1.4:

If $v = (v_x, v_y, v_z)$, $Tv = (-2v_x + 3v_z, -v_z, v_x + 2v_y)$, determine the Cartesian components of $T^T v$.

Solution: Let $T^T v = (a, b, c)$, $u = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\because \ u\cdot T^T v = v\cdot Tu$

$$\therefore \ \alpha a + \beta b + \gamma c = v_x(-2\alpha + 3\gamma) + v_y(-\gamma) + v_z(\alpha + 2\beta)$$
$$= (-2v_x + v_z)\alpha + 2v_z\beta + (3v_x - v_y)\gamma$$

$$\therefore \ (a, b, c) = (-2v_x + v_z, 2v_z, 3v_x - v_y) = T^T v$$

<u>张量的笛卡尔表达</u>

$$Tv = T(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$$
$$= v_x T\vec{i} + v_y T\vec{j} + v_z T\vec{k}$$ （由 T 的线性可知）

我们作以下记号

$$T\vec{i} = Te_x = T_{xx}e_x + T_{yx}e_y + T_{zx}e_z$$
$$Te_y = T_{xy}e_x + T_{yy}e_y + T_{zy}e_z$$
$$Te_z = T_{xz}e_x + T_{yz}e_y + T_{zz}e_z$$

那这样我们就很显然能想到T的矩阵表达：

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$Tv = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$= v_x \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yx} \\ T_{zx} \end{bmatrix} + v_y \begin{bmatrix} T_{xy} \\ T_{yy} \\ T_{zy} \end{bmatrix} + v_z \begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \\ T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= v_x Te_x + v_y Te_y + v_z Te_z$$

例：设 $Tv = u \times v$，$u = (u_x, u_y, u_z)$，写出T的矩阵表达

$$Te_x = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_x & u_y & u_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = u_z e_y - u_y e_z = (0, u_z, -u_y)$$

$$Te_y = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_x & u_y & u_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = u_x e_z - u_z e_x = (-u_z, 0, u_x)$$

$$Te_z = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u_y e_x - u_x e_y = (u_y, -u_x, 0)$$

$$\therefore \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$