A Brief on Tensor (Continue)

上次我们看到了多二阶张量的矩阵表达，下面来看张量的笛卡尔基底。

先来看二维的情形。

$$Tv = v_x(T_{xx}e_x + T_{yx}e_y) + v_y(T_{xy}e_x + T_{yy}e_y)$$

但又有 $v_x = v\cdot e_x$，$\therefore\ v_x\cdot e_x = (v\cdot e_x)\cdot e_x = e_x\otimes e_x(v)$

$$\therefore\ Tv = (T_{xx}e_x\otimes e_x + T_{xy}e_x\otimes e_y + T_{yx}e_y\otimes e_x + T_{yy}e_y\otimes e_y)v,\ \forall v$$

∴ 我们认为，$T = T_{xx}e_x\otimes e_x + T_{xy}e_x\otimes e_y + T_{yx}e_y\otimes e_x + T_{yy}e_y\otimes e_y$

注意，可以证明这样的表示唯一，即证 $(T_{xx}, T_{xy}, T_{yx}\ T_{yy})$ 唯一确定。见书P19.

类比到三维，我们有

$$T = T_{xx}e_x\otimes e_x + T_{xy}e_x\otimes e_y + \dots + T_{yz}e_y\otimes e_z$$

即 $\forall T$ 可以用 $\{e_i\otimes e_j\}_{i=x,y,z,\ j=x,y,z}$ 的线性组合表示，表明了上次提到的结论。

$\{e_i\otimes e_j\}_{i,j=x,y,z}$ 称为二阶张量的一组基（9个元素，均为dyads）

好，第一章到此为止。习题有时间再做。在继续前唠叨两句：

张量分析果真是角标大战。要不是把直积写成 $\otimes$，恐怕一个式子从头到尾除了加号就是字母和角标，而这些角标一层层垒出来，信息熵极大。下面还有 T_{ij}, T^{ij}, T_j^k, ϵ^{ijk}, ϵ_{ijk}, Γ_{ij}^k, g_{ij}, g^{ij}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ 之流，Магжишщукува！

（有一说一，虽然 1-tensor，2-tensor，3-tensor 逐步叠加的定义有点类似 1-category，2-category，... ∞-category，但给人的感觉的抽象程度不同。虽然都是数学，但前者极物理，后者极纯数。两种感觉的对比很奇妙。当然张量和作用的"身份交替"和CW复形里的 cell 和 skeleton 又有点像，但感觉差异更大了，简直像两种推广方式。）

Chapter II 开头向量空间的基就跳过了。

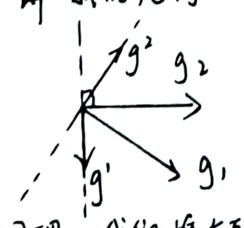
它通过向量的基引出点积的展开，再说为了简化，引入reciprocal base. 我们从这开始：

设 $u = u^i g_i$，$v = v_j g^j$

$$\therefore\ u\cdot v = u^1v_1\, g_1\cdot g^1 + u^1v_2\, g_1\cdot g^2 + u^2v_1\, g_2\cdot g^1 + u^2v_2\, g_2\cdot g^2$$

为了让 $u\cdot v = u^1v_1 + u^2v_2$，我们要让 $g_1\cdot g^1 = g_2\cdot g^2 = 1$，$g_1\cdot g^2 = g_2\cdot g^1 = 0$

∴ 即我们几何地处理这件事：



$\because\ g_2\cdot g^1 = 0\quad \therefore\ g^1\perp g_2$

$\because\ g_1\cdot g^1 = 1\quad$ ∴ 调节 g^1 的长度以满足情况。

同理可得出 g^2

同理，我们推广到n维空间。让 $\{g_1, g_2 \cdots g_i \cdots\} = \{g_i\}$ 为一组基。

我们先回头补充一个概念。

让 $G=[g_1,g_2,\cdots]$ 表示 $n\times n$ 矩阵阵，其中每列为 g_i 的笛卡尔表示，那么如果 $\{g_i\}$ 为基，则 $\det G\neq 0$，反之亦然。我们把 G 称为 $\{g_i\}$ 的雅可比矩阵，用记号 $J\equiv \det G$ 表示 the Jacobian of $\{g_1,g_2,\cdots\}$

好，我们回到刚刚的位置。∵ $\det G\neq 0$ ∴ G^{-1} 存在。G^{-1} 中第 i 行的元素可以被视作 g^i 的笛卡尔表示，i.e.，

$$G^{-1}=\begin{bmatrix} g^1\\ g^2\\ \vdots \end{bmatrix} = [g^1,g^2,\cdots]^T = [g^i]$$

(Consistent with this notation we may set $G\equiv[g_i]$ when we wish to regard G as a collection of column vectors.)

矩阵的乘法法则告诉我们，$G^{-1}G$ 的 a_{ij} 等于 G^{-1} 的第i行与 G 的第 j 列依次相乘再相加
又因为 $G^{-1}G=I$，所以这等于告诉我们：

$$g^i\cdot g_j = \delta^i_j \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } i=j \\ 0, & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

δ^i_j 被称为 Kronecker delta. 集合 $\{g^i\}$ 被称为 reciprocal basis，其元素被称为 reciprocal base vectors. 之所以也称为 basis 是因为显然 $\det G^{-1}\neq 0$.

Problem 2.2

Find the reciprocal base vectors of the given basis:

$$g_1=(1,-1,2),\quad g_2=(0,1,1),\quad g_3=(-1,-2,1)$$

Solution: $G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$，下面用我上次用还是半年前的高斯消元求 G^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 6 & -3 & -1 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{array}\right] \quad \therefore G^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$\therefore g^1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix},\quad g^2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6}\end{bmatrix},\quad g^3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

下面是 the roof (contravariat) and cellar (covariat) components of a vector. (话说 component 到底翻译成什么，本义是组成但直接这么说太不正式了，我先前都把 Cartesian component 说成笛卡尔表示，就是纯意译了。)

给定一组基 $\{g_i\}$，我们有 $v=v^ig_i$；当然也有 $v=v_ig^i$

于是我们有了一些烦人的专有名词。

$v^i \to$ roof components of v $\quad g^i \to$ roof base vectors

$v_i \to$ ~~f~~ cellar components of v $\quad g_i \to$ cellar base vectors

当然还有一套更正式的名字但太长了也记不住。它还说了一种记忆法，把行、列也联系上了：

$$A^{R(ow)}_{C(olumn)} \longleftrightarrow A^{R}_{C} \longleftrightarrow A^{R(oof)}_{C(ellar)}$$

Problem 2.3

Compute the cellar components of the vector $v\sim(3,3,6)$ with the same basis in Problem 2.2.

Solution: 注意到 $v\cdot g_1 = (v_1 g^1 + v_2 g^2 + v_3 g^3)\cdot g_1$

$$= v_1 g^1\cdot g_1 + v_2 g^2\cdot g_1 + v_3 g^3\cdot g_1 = v_1$$

$$\therefore\ v_1 = v\cdot g_1 = 3-3+12 = 12$$

$$v_2 = v\cdot g_2 = 0+3+6 = 9$$

$$v_3 = v\cdot g_3 = -3-6+6 = -3$$

（实际上不仅有 $v_i = v\cdot g_i$，还有 $v^j = v\cdot g^j$。以下推导一遍：

$$v\cdot g^j = (v^i g_i)\cdot g^j$$

展开后仅在 $v^j g_j\cdot g^j$ 这一行不为0（用 δ_j^i），$g_j\cdot g^j = 1$ $\therefore v\cdot g^j = v^j$ ）

下面再推导一个trivial的式子。让 $u = u^i g_i$，$v = v_j g^j$

$$u\cdot v = (u^i g_i)\cdot(v_j g^j) = u^i g_j \delta_i^j = u^1 g_1 + u^2 g_2 + u^3 g_3$$

Problem 2.4

Compute $u\cdot v$: $u = 2g_1 - g_2 + 4g_3$, $\cancel{v = 3g_1 + 3g_2 + 6g_3}$, $w = -3g^1 + 2g^2 - 2g^3$

Then $w\cdot v$, $u\cdot w$. $\{g_i\}$ is the same as Problem 2.2.

Solution: 我们刚刚已经算出来 $v = 12g^1 + 9g^2 + (-3)g^3$

$\therefore\ u\cdot v = 24-9-12 = 3$, $\cancel{w\cdot v = -9+6-12 = -15}$

$u\cdot w = -6-2-8 = -16$ 题目抄错了。$v = (3,3,6)$

犯了一个相当waoxyo的错误。$v=(3,3,6)$ 显然不是 $v = 3g_1 + 3g_2 + 6g_3$

v的 floor components 还得重算一遍。

鉴于 $\{g^i\}$ 我们算过了，所以直接用 $v^j = v\cdot g^j$ 也能算，但我还是打算用正常的方法。

$$\begin{cases} 3 = v^1\times 1 + v^2\times 0 + v^3\times(-1) \\ 3 = v^1\times(-1) + v^2\times 1 + v^3\times(-2) \\ 6 = v^1\times 2 + v^2\times 1 + v^3\times 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^1 = 2 \\ v^2 = 3 \\ v^3 = -1 \end{cases}$$

$$\therefore\ w\cdot v = -6+6+2 = 2$$

下面我们来看如何用general basis算叉积。

为了方便起见，我们用 $(v)^i$ 和 $(v)_j$ 来表示 floor/cellar components.

所以我们记 $u \times v = (u \times v)_k g^k$

不妨设 $u = u^i g_i$，$v = v^j g_j$，$\therefore$ 我们有

$$(u \times v)_k = (u \times v) \cdot g_k = (u^i g_i \times v^j g_j) \cdot g_k = u^i v^j (g_i \times g_j) \cdot g_k$$

$$\equiv u^i v^j \epsilon_{ijk}$$

其中 ϵ_{ijk} 有 $3^3 = 27$ 个，被称为 the collar components of the permution tensor P

这玩意似乎是三阶张量

下面来看一些性质：

$$\epsilon_{123} = (g_1 \times g_2) \cdot g_3 = \begin{vmatrix} g_{1i} & g_{1j} & g_{1k} \\ g_{2i} & g_{2j} & g_{2k} \\ g_{3i} & g_{3j} & g_{3k} \end{vmatrix} = \det[g_1, g_2, g_3] = J$$

见上次笔记中对混合积的行列式表示

$$\epsilon_{132} = (g_1 \times g_3) \cdot g_2 = -J, \quad \epsilon_{231} = (g_2 \times g_3) \cdot g_1 = J$$

$\therefore$ 我们易知：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} J, & (i,j,k) \text{是} (1,2,3) \text{的偶置换} \\ -J, & (i,j,k) \text{是} (1,2,3) \text{的奇置换} \\ 0, & (i,j,k) \text{里有相等的} \end{cases}$$