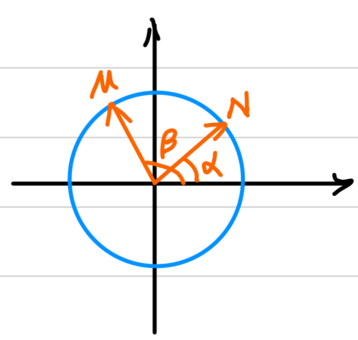
三角函数和差角公式的特殊证明方式

起因是上课时用叉积试着证了一下sin差角，随后试着用混合积直接证tan和角。发现不行；然后试着用张量里的reciprocal basis，然后依然是没用（因为我想直接通过坐标表示cos和sin，所以采用正交分解，但正交分解的单位基对应的reciprocal basis恰好又是其本身，根本用不到reciprosal basis的性质），但同时在尝试算 $\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta\end{bmatrix}$ 的reciprocal basis的矩阵时，发现虽然用不到reciprosal basis，但直接用矩阵似乎也是一个思路。在此整理一下。

1° sin差角公式的叉积证明

和用点积处理cos和差角一样，我们把角范围缩到 $[0, 2\pi)$



$\vec{OM} = (\cos\beta, \sin\beta)$, $\vec{ON} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$|\vec{OM}\times\vec{ON}| = 1\times 1\times|\sin(\beta-\alpha)| = |\sin(\beta-\alpha)|$

又∵ $\vec{ON}\times\vec{OM} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0\end{vmatrix} = (\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)\vec{k}$

当 $\beta>\alpha$ 时，$\vec{ON}\times\vec{OM}$ 垂直平面向上，z坐标为正值。

∴ $\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$. 其余情况同理。

2° 运用旋转矩阵

倒不如说这才是最合理的方法。我很早以前就喜欢用旋转矩阵。

所谓旋转 $\alpha+\beta$ 其实等价于先旋转 α 再旋转 β，那么 $\alpha+\beta$ 的旋转矩阵就等于 α 的复合 β 的。

∴ $\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

∴ 直接矩阵乘法展开即可。

3° 欧拉公式

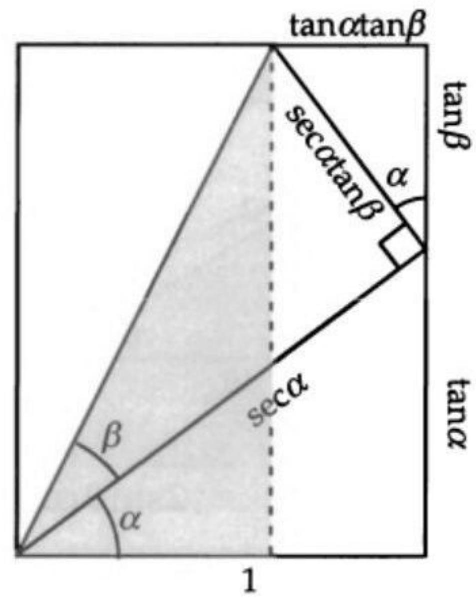
涉及三角函数的公式用复数一般来说最方便。这个证法比棣莫弗公式还要trivial：

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\
=\ & e^{i(\alpha+\beta)} \\
=\ & e^{i\alpha}e^{i\beta} \\
=\ & (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
=\ & (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}$$

但是这些都是证cos和sin的，我很好奇有无直接证tan的。

在MSE看到个很不凡的证法：

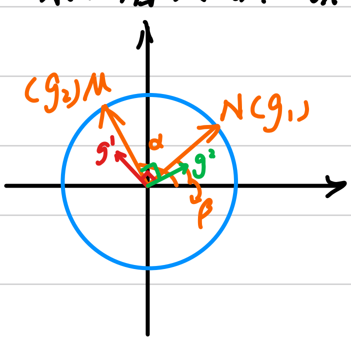
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$



但几何证法向来有其局限性，我依然想尝试向量法。这里姑且列举一些尝试。

1° reciprosal basis的尝试

如果试着以 $\vec{m}$、$\vec{n}$ 为基底 $\{g_i\}$ 的话，则有



$$G=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{bmatrix}$$

用高斯消元法，算出 G^{-1}：

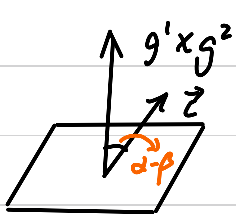
$$G^{-1}=\csc(\alpha-\beta)\begin{bmatrix}-\sin(\beta) & \cos(\beta)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

$\therefore\ g^1=(-\sin\beta\csc(\alpha-\beta),\ \cos\beta\csc(\alpha-\beta))$，$g^2=(\sin\alpha\csc(\alpha-\beta),-\cos\alpha\csc(\alpha-\beta))$

$\therefore\ |g^1\times g^2|=\left|\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\sin\theta\right|$

由reciprosal basis的定义，可作出其位置： $\therefore\ \theta=\pi-(\alpha-\beta)$

$\therefore\ |g^1\times g^2|=\left|\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\right|$



不妨令 $|\vec{c}|=1$，$\vec{c}$ 位于 xOz 平面，且 $\vec{c}$ 与 $g^1\times g^2$ 夹角为 $\alpha-\beta$

$\therefore\ \vec{c}\ (\cos(\alpha-\beta),\ 0,\ \sin(\alpha-\beta))$

$\therefore\ (g^1\times g^2)\cdot\vec{c}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{|\sin(\alpha-\beta)|}$，在该情况下即为 $\tan(\alpha-\beta)$

$$\therefore\ \tan(\alpha-\beta)=\begin{vmatrix}\cos(\alpha-\beta) & 0 & \sin(\alpha-\beta)\\ \frac{-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} & \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} & 0\\ \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} & \frac{-\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} & 0\end{vmatrix}$$

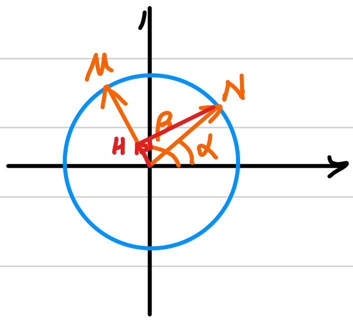
$$=\begin{vmatrix}\tan(\alpha-\beta) & 0 & 1\\ -\tan\beta & 1 & 0\\ \tan\alpha & -1 & 0\end{vmatrix}(\tan\alpha-\tan\beta)$$

(有个小错误。第一行第一列应当是1 / tan)

$\therefore\ \tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$

2° 投影向量

我虽然还没开始试，都觉得不大可行。



$\vec{OH} = (\cos\beta\cos(\beta-\alpha),\ \sin\beta\cos(\beta-\alpha))$

$\therefore\ \vec{NH} = (\cos\beta\cos(\beta-\alpha) - \cos\alpha\ ,\ \sin\beta\cos(\beta-\alpha) - \sin\alpha)$

$\therefore\ \vec{OH}^2 = \cos^2(\beta-\alpha)$

$\vec{NH}^2 = \cos^2(\beta-\alpha) + 1 - 2\cos(\beta-\alpha)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= 1 - \cos^2(\beta-\alpha) = \sin^2(\beta-\alpha)$

果真不行。最后还是回到 $\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$ 上了。姑且就这样吧。