Informal Notes on Mathematics

2023.02.23

首先纠正20号笔记的一个错误。$\vec{c}=(\sin(\alpha-\beta),0,\cos(\alpha-\beta))$

$$\therefore 1/\tan(\alpha-\beta)=\begin{vmatrix}\sin(\alpha-\beta) & 0 & \cos(\alpha-\beta)\\ \frac{-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} & \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} & 0\\ \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} & \frac{-\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}\\ -\tan\beta & 1 & 0\\ \tan\alpha & -1 & 0\end{vmatrix}(\tan\alpha-\tan\beta)$$

不过似乎算出来也不对，不知道哪出问题了。

另外是一道有点epδιώ的题。

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{3}$，试求 $\cos\alpha\cos\beta$

这里给出2种特别的尝试：

法①：设 $\sin\alpha=a$，$\sin\beta=b$，$\cos\alpha=c$，$\cos\beta=d$

$$\begin{cases}a+b=\frac{1}{2}\\ c-d=\frac{1}{3}\\ a^2+c^2=1\\ b^2+d^2=1\end{cases}$$

可知其本质为一元二次方程求解，a, b, c, d一定为某们二次方程的根

$\therefore$ 四个数均可拆成有理数+根式的形式

不妨设 $a=q_1+r_1$ $\because a+b$ 有理 $\therefore b=q_2-r_1$ $\therefore q_1+q_2=\frac{1}{2}$

$c=q_3+r_2$ $\because c-d$ 有理 $\therefore d=q_4+r_2$ $\therefore q_3-q_4=\frac{1}{3}$

代入下方两式并化开：

$$\begin{cases}q_1^2+2q_1r_1+r_1^2+q_3^2+2q_3r_2+r_2^2=1\\ q_2^2-2q_2r_1+r_1^2+q_4^2+2q_4r_2+r_2^2=1\end{cases}$$

蓝线部分有理，橙色部分为无理，而其合为1，即有理数，因此我们有：

$$\begin{cases}q_1^2+q_3^2=q_2^2+q_4^2 & ①\\ q_1r_1+q_3r_2=-q_2r_1+q_4r_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_1=-\frac{q_3}{q_1}r_2\\ \frac{q_1}{q_3}=-\frac{q_2}{q_4} & ②\end{cases}$$

由①，②两式可知 $q_1^2=q_3^2$，$q_2^2=q_4^2$

$\because q_1+q_2=\frac{1}{2}\neq0$，$q_3-q_4=\frac{1}{3}\neq0$ $\therefore q_1=q_2=\frac{1}{4}$，$q_3=-q_4=\frac{1}{6}$

代回原式易求出 r_1, r_2（只需开一个根号），解出c, d再求积即可。

法②：这个方法在尝试时并没有成功。

同上列出四个方程，再写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解这个矩阵方程，得：

$$\begin{cases} d = \dfrac{-3ab+6a-2bc+6b}{6(ad+bc)} \\ a = \dfrac{3bc-2cd-6c+6d}{6(ad+bc)} \\ b = \dfrac{3ad+2cd+6c-6d}{6(ad+bc)} \\ c = \dfrac{-3ab+2ad+6a+6b}{6(ad+bc)} \end{cases}$$

下面懒得处理了。

接下来看一些别的有关结论。

Multiple-angle formulas are given by

$$\sin(n\,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k x \sin^{n-k} x \sin\left[\tfrac{1}{2}(n-k)\pi\right] \tag{21}$$

$$\cos(n\,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k x \sin^{n-k} x \cos\left[\tfrac{1}{2}(n-k)\pi\right], \tag{22}$$

and can also be written using the recurrence relations

$$\sin(n\,x) = 2\sin[(n-1)\,x]\cos x - \sin[(n-2)\,x] \tag{23}$$

$$\cos(n\,x) = 2\cos[(n-1)\,x]\cos x - \cos[(n-2)\,x] \tag{24}$$

$$\tan(n\,x) = \frac{\tan[(n-1)\,x] + \tan x}{1 - \tan[(n-1)\,x]\tan x}. \tag{25}$$

我初步估计下面我要说的那题与这个递推式有关。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta & & & & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

试证明：上述 $n\times n$ 矩阵的行列式为 $\cos(n\theta)$

证明：一开始想用代数余子式硬算的方法 —— 好像就是硬算

用最后一行展开：

$$\det(A_n)=2\cos\theta\det(A_{n-1})-\det(A_{n-2})$$

直接归纳法即可。