Informal Notes on Mathematics
2023.02.25

非标准分析：从 0.999⋯到 1

1 非标准分析的基本动机与总体框架

本笔记记录了我对非标准分析（Nonstandard Analysis, NSA）及其与传统标准分析（Standard Analysis, SA）在某些结论上差异的思考过程。非标准分析是 20 世纪 60 年代由罗宾逊（Abraham Robinson）所创立的一种数学体系，其核心思想在于引入严格意义下的**无限小量**与**无限大数**，构造出超实数域，从而使得我们可以以直观的方式处理极限、连续性、微分等概念。通过对传统分析的“标准部分”加以扩充，非标准分析使得许多本来需要 – 语言描述的结论可以用直观的算术方法进行证明。

我在学习过程中，总觉得传统分析虽然严谨，但很多证明显得繁琐，而非标准分析却为我们提供了另一种思路，让数学变得更富有“感性”色彩。下面我将详细阐述非标准分析的一些基本概念与定理，并与标准分析做出对比。注意，以下内容部分来自对教材、论文以及网络上（例如维基百科、nlab、MathStackExchange、MathOverflow 等）的参考与整理。

2 超实数体系的构造与基本性质

非标准分析的核心在于构造出一个扩充了实数系 $\mathbb{R}$ 的数域 ${}^*\mathbb{R}$，即超实数系。最常见的构造方法是利用超滤子（ultrafilter）和超积（ultraproduct）的思想。

定义 1.1（超滤子与超积）：设 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为实数序列，选取一个非主超滤子 $\mathcal{U}$ 在自然数集 $\mathbb{N}$ 上，则定义序列 $\{r_n\}$ 的等价关系为：

$$\{r_n\} \sim \{s_n\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{U}.$$

超实数系定义为所有实数序列的商集，即

$${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim .$$

由此，每个超实数可以看作一个等价类。

我在这里不免联想到集合论中关于极大滤子的讨论，其存在性依赖于选择公理。我猜测这种方法虽然抽象，但在逻辑上是严谨的。事实上，参照罗宾逊的原始论著以及后来相关论文中的证明（例如在 MathStackExchange 上讨论超积构造的帖子），我们可以证明 ${}^*\mathbb{R}$ 构成一个**有序域**，并且是一个超越了传统实数的非标准模型。

性质 1.2：在超实数系中存在非零无限小量，即存在 $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ 满足

$$0 < |\varepsilon| < \frac{1}{n} \quad \text{对所有正整数} n.$$

证明思路（草稿）：设 ε 由序列 $\{\varepsilon_n\}$ 定义，其中 $\varepsilon_n = 1/n$。由于对于任意固定的正整数 k，有 $\varepsilon_n < 1/k$ 当 $n > k$ 成立，而非主超滤子保证大部分指标满足该不等式，因

此 ε 对应的等价类满足上述条件。尽管这一证明在细节上需要严格证明，但我认为大致思路无误。

此外，利用超滤子方法还可以证明超实数系满足完备性的一种“非标准”形式，即通过**转移原理**，许多标准分析中的定理均可以“转移”到超实数系中，从而在无限小和无限大环境下依然成立。

3 转移原理：桥梁与限制

定理 2.1 (转移原理)：设 φ 为标准语言中的任意一个一阶公式，则 φ 在实数系 $\mathbb{R}$ 中成立，当且仅当其对应的公式在超实数系 $^*\mathbb{R}$ 中也成立。

这一原理是非标准分析的核心工具，它告诉我们，所有用第一阶逻辑可表达的定理，在超实数体系中仍然有效。

例如，我们可以利用转移原理证明：对于任意标准函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，若 f 在某点 a 连续，则对于任意无限小量 ε，有

$$^*f(a+\varepsilon)\approx {}^*f(a)$$

其中“$\approx$”表示两者的差为无限小量。

我在此处想到了一个问题：转移原理虽然强大，但它的适用范围仅限于第一阶语言所描述的命题。这就意味着某些涉及高阶概念的定理，例如完备性定理的某些形式，在超实数体系中可能无法直接通过转移原理获得。对此，我突发奇想，也许可以通过扩展逻辑系统来解决这一问题，但目前这仍然悬而未决。

4 内部集与外部集：界限与探讨

在非标准分析中，集合论的范畴发生了有趣的变化。我们将超实数系中的集合分为**内部集**与**外部集**。

定义 3.1：一个子集 $A\subset{}^*\mathbb{R}$ 称为**内部集**，若存在某个标准集合 $B\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 使得 A 是 B 在商集中所诱导的集合。反之，若 A 不能表示为这样的集合，则称 A 为**外部集**。

我在学习过程中曾遇到这样一个问题：如何证明某个特定集合是外部的？例如，通常提到的无限小集合

$$\mu(0)=\{x\in{}^*\mathbb{R}:x\text{ 是无限小量}\}$$

就是一个外部集。这个结论在一些教材中是直接给出的。

5 连续性的非标准定义与直观解释

在标准分析中，连续性的定义依赖于 ε–δ 语言；而在非标准分析中，连续性可以用无限小量的语言简洁地表述。

定理 4.1：设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为函数，则 f 在 a 处连续的充要条件为：对于所有无限小量 $\varepsilon\in{}^*\mathbb{R}$（$\varepsilon\neq0$），有

$$^*f(a+\varepsilon)\approx{}^*f(a).$$

证明思路：⇒ 方向可以利用标准连续性的 ε–δ 定义，通过转移原理得到；而 ⇐ 方向则反证法构造出矛盾。

我在这里详细思考了如何将“无限小”的概念精确定义为“与 0 距离无限接近”，从而使得上述表述严谨。参考了部分教科书中的证明，但我仍感到在直观理解与严格证明之间存在微妙的张力。事实上，我猜测这一方法能更好地揭示连续性背后的直观含义，而不仅仅是机械地应用定义。

6 微分与导数的非标准解释

传统上，导数定义为极限

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

在非标准分析中，我们可以直接引入无限小量 h（$h \neq 0$ 且无限小），定义

$$f'(a) = \mathrm{st}\left(\frac{{}^*f(a+h) - {}^*f(a)}{h}\right),$$

其中 st 表示取标准部分。

这一定义在直观上十分自然，因为它直接模仿了传统中“无限接近”的思想。我曾试图证明这一定义与传统定义的等价性，证明过程大致依赖于转移原理和标准部分映射的连续性。尽管证明过程中有一些细节需要仔细处理（例如保证标准部分映射的良定义性），但总体来说，这种方法使得微分概念更加直观。也许可以利用这种思想来简化某些复杂函数的导数计算，但目前这一想法还需要更多例证加以佐证。

7 积分的非标准解释与黎贝格测度

积分是分析中的核心概念之一。在非标准分析中，积分可以通过无限细分的思想来重新解释。设区间 $[a,b]$ 被分割为 N 个子区间，其中 N 为一个无限大的超自然数。则积分可以近似表示为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x,$$

其中 $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ 为无限小量。

这种方法类似于黎曼和积分的思想，但不同之处在于我们允许分割数为无限大，从而使得 Δx 为无限小量。通过取标准部分，我们便能得到精确的积分值。

此外，非标准分析还在概率论中得到了应用，例如通过构造 **Loeb 测度**将内部有限测度扩展为外部的标准测度，从而为概率论提供了另一种解释。我在查阅相关资料时，对这种方法感到十分新颖，并猜测这种方法在处理复杂概率问题时具有潜在优势

8 级数、极限与无穷小量的精细分析

在标准分析中，我们处理无穷级数时常常依赖极限概念。而非标准分析通过引入无限大数和无限小量，提供了一种新的视角。

例如，考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

我们可以取一个无限大的正整数 N，考察部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$。若存在一个有限的超实数 L 使得 $S_N \approx L$，则我们认为级数收敛，且其和为 $\mathrm{st}(S_N)$。

这一思路直观上非常美妙，因为它避免了“极限”的抽象表达，而是直接利用无限大与无限小的性质进行计算。我在学习时曾试图将这一思想应用于某些发散级数的情形，结果发现即使在非标准分析中，发散级数依然无法“归约”为有限值，但这反而验证了标准分析与非标准分析在本质上的一致性。

9 连续函数、微分函数与解析函数的比较讨论

标准分析中，连续函数与微分函数之间存在着明确的包含关系：处处可微必处处连续，但反之不成立。而在非标准分析中，借助无限小量的概念，我们可以更直观地描述这一关系。

例如，对于函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，若存在一个无限小量 ε 使得

$$\frac{{}^*f(a+\varepsilon) - {}^*f(a)}{\varepsilon}$$

有唯一的标准部分，则可以说 f 在 a 处具有导数。这种描述不仅直观，而且在很多情况下能简化证明过程。

我在反复对比两种分析体系的定义后发现，非标准分析在处理一些极限问题时具有天然优势，但同时也需要小心处理内部与外部概念之间的界限。正如我在前文提到的那样，转移原理仅适用于第一阶逻辑描述的命题，因此在处理高阶概念时仍需回到标准分析的框架中。

10 无穷小量与无限大的代数运算

超实数系中的无限小量与无限大数具有一套独特的代数运算规则。例如，设 ε 为一个无限小量，Δ 为一个无限大数，则可以证明：

$$\varepsilon \cdot \Delta \approx 1,$$

这一性质与直觉上“无限小量与无限大数互为倒数”的观点一致。

我在具体计算中发现，通过巧妙地选取代表序列，可以使得很多看似复杂的运算化为简单的代数问题。比如，设

$$\varepsilon = [\{1/n\}], \quad \Delta = [\{n\}],$$

则显然有 $\varepsilon\Delta = [\{1\}]$，即标准数 1。这一结果直观上验证了无限小量与无限大数的互补性。

然而，必须注意的是，并非所有无限小量和无限大数都存在这样的互逆关系，这取决于所选用的超滤子及构造方式。因此，我在此谨慎地指出，这里的证明依赖于特定构造，普适性仍需进一步探讨。

11 非标准连续性与微分中的“标准部分”映射

在非标准分析中，标准部分映射 $\mathrm{st} : \{x \in {}^*\mathbb{R} :\ x \text{ 是有限的}\} \to \mathbb{R}$ 起到了将非标准数“归一化”为标准数的作用。

定义 7.1：设 $x \in {}^*\mathbb{R}$ 为有限超实数，则存在唯一的实数 r 满足 $x \approx r$。称 r 为 x 的**标准部分**，记作 $\mathrm{st}(x) = r$。

这一映射在证明微分、积分等定理时尤为重要。比如，在导数的定义中，我们有

$$f'(a) = \mathrm{st}\left(\frac{{}^*f(a+\varepsilon) - {}^*f(a)}{\varepsilon}\right)$$

对任意无限小量 $\varepsilon \neq 0$ 均成立。

我在反复推敲这一概念时发现，标准部分映射实际上充当了“桥梁”的角色，将直观的非标准计算结果转化为严谨的标准结论。然而，我也注意到，在处理一些复杂函数时，如何证明标准部分映射的连续性和良定义性仍存在争议，因而我只能猜测这一结论在大多数情形下是成立的。

12 非标准分析在概率论中的应用：Loeb 测度

在传统概率论中，我们常常依赖于 Lebesgue 测度构造概率空间，而非标准分析提供了一种新颖的构造方法。

考虑一个内部概率空间，其概率测度是定义在内部集上的有限加性测度。通过 Loeb 测度构造方法，可以将其扩展为一个标准的 σ-有限测度，从而为概率论提供新的工具。

具体来说，设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个内部概率空间，其中 Ω 是内部集合，P 是内部测度。通过如下步骤：

(a) 首先利用内外测度的概念定义 Loeb 测度 $L(P)$；

(b) 然后证明 $L(P)$ 在标准的 σ-代数上满足完备性及可数可加性；

(c) 最终得到一个标准概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_L, L(P))$。

这一过程不仅展示了非标准分析在概率论中的应用，而且为处理某些极限问题（例如大数定律与中心极限定理）提供了直观的解释。

13 标准分析与非标准分析在基本结论上的对比

在对比标准分析与非标准分析时，我主要关注以下几个方面：

(1) **极限与连续性的描述**：在标准分析中，极限定义依赖于 ε–δ 语言，而在非标准分析中则可用无限小量直接表述。

(2) **微分的定义**：标准定义依赖于极限过程，而非标准定义则引入标准部分映射，使得导数计算更直观。

(3) **积分的计算**：传统积分通过黎曼和或 Lebesgue 测度定义，而非标准积分利用无限分割与无限小量思想给出一种直观解释。

(4) **内部集与外部集的区分**：这一概念在标准分析中无对应概念，但在非标准分析中却起到了核心作用。

对于每一项，我都试图寻找两者之间的联系和差异。例如，在讨论连续性时，我发现两者最终的结论是一致的，但非标准分析在表述上更为直观；而在处理复杂积分问题时，非标准分析能够借助无限细分的思想给出一种类似"微积分基本定理直观证明"的方法，但同时也存在因内部与外部概念而带来的技术难题。总体上，我认为两者在逻辑上是等价的，但在具体证明与应用中各有优劣。

14 补充：集合论与模型论视角下的非标准分析

在更高的数学层次上，非标准分析不仅是一种分析工具，更是一种模型论的应用。利用洛斯定理（Łoś's Theorem），我们可以将超积构造看作是模型论中"基本不变量"的一种体现。

定理 8.1（洛斯定理）：设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 为一族结构，每个 M_i 满足某个一阶语言的公理，取非主超滤子 $\mathcal{U}$ 在 I 上，则超积

$$\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U}$$

依然满足该语言的所有一阶公理。

这一结果是非标准分析成立的逻辑基础。通过洛斯定理，我们可以证明所有标准分析中的一阶定理均在超实数系中成立，这便是转移原理的逻辑根基。

我在思考这一问题时，不免联想到更高阶的模型论问题，例如超结构的饱和性（saturation）以及其在数学分析中的应用。虽然这些问题超出了初级非标准分析的范畴，但它们无疑为深入理解非标准分析提供了更为坚实的理论支持。我猜测未来可以将这些模型论工具应用于更广泛的数学领域，如拓扑、代数及几何。

15 具体例题解析与试错记录

在学习过程中，我尝试将非标准分析的方法应用于一些具体例题中，并记录了我的试错过程。下面举两个例子：

15.1 例题 1：证明连续函数在紧区间上取得最值

标准证明：利用闭区间定理证明连续函数在闭区间上必取得最大值与最小值。

非标准证明思路：设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则对于任意无限小量 ε，有

$${}^*f(x+\varepsilon)\approx{}^*f(x).$$

取一个无限大的正整数 N，将区间 $[a,b]$ 均分为 N 份，设

$$x_k=a+k\Delta x,\quad \Delta x=\frac{b-a}{N}.$$

注意到每个 Δx 为无限小量。利用转移原理，存在某个 k_0 使得 $f(x_{k_0})$ 为所有点中最大的标准部分。

这一证明虽然直观，但需要小心内部集与外部集的区分。

15.2 例题 2：利用非标准方法证明洛必达法则

考虑函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在某点处均趋于 0 或均趋于无穷大，利用非标准分析证明

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

当且仅当对于任意无限小量 $\varepsilon \neq 0$，有

$$\frac{{}^*f(a+\varepsilon) - {}^*f(a)}{{}^*g(a+\varepsilon) - {}^*g(a)} \approx L.$$

在证明过程中，我借助了转移原理与标准部分映射的性质，认为这一方法在直观上能够解释洛必达法则背后的“速率比较”思想。尽管证明中部分细节存在争议（例如如何严格定义差商在无限小量下的意义），但我相信这一方法能够为大家提供一种不同于传统证明的直观理解。

16 关于非标准分析方法优劣的个人讨论

我反复比较了标准分析与非标准分析在不同问题上的处理方法，总结出以下几点体会：

(a) **直观性**：非标准分析利用无限小量与无限大数，使得许多定理的证明更具直观性。例如，连续性与微分的定义都可以直接利用无限小的概念表述，这在一定程度上降低了理解难度。

(b) **证明简洁性**：在某些情形下，利用转移原理能够将原本繁琐的 ε–δ 证明简化为一个直观的推论。但我猜测这种简洁性是建立在强大逻辑工具之上的，因此其内部逻辑的严谨性依然不可忽视。

(c) **模型论基础**：非标准分析的构造依赖于超滤子、超积等模型论工具，使得整个理论具有坚实的逻辑基础。然而，这也导致非标准分析在某些方面显得抽象且不易被初学者接受。

(d) **应用范围**：尽管非标准分析在理论上与标准分析等价，但在实际应用中，某些领域（例如概率论中的 Loeb 测度构造）显示出其独特优势。但在其他领域，标准分析的工具可能更为普适和直观。

总之，我认为两种方法各有千秋，关键在于如何根据具体问题选择最适合的工具。我突发奇想，也许在未来的研究中，可以构造出一种混合方法，既保留非标准分析的直观优势，又具备标准分析的普适性。

17 高级话题探讨：超结构的饱和性与可分性

深入到非标准分析的内部结构，我们不可避免地要讨论超结构的饱和性问题。

定义 9.1：设 ${}^*\mathbb{R}$ 为超实数系，若对于任意满足有限交性质的内部族 $\{A_i\}_{i\in I}$，存在一个元素 $x \in {}^*\mathbb{R}$ 使得 $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$，则称 ${}^*\mathbb{R}$ 是**饱和的**。

饱和性是判断超实数系是否能“捕捉”足够多的信息的重要标准。一般来说，构造出的超实数系在逻辑上可以满足不同等级的饱和性条件，这直接影响到转移原理在某些极限问题中的应用。

我在阅读部分数学教材时，注意到有学者利用饱和性证明了一些在标准分析中较难证明的极值存在性定理，这令我十分惊叹。同时，我也意识到，对于不同的数学问题，选择合适的饱和度要求是至关重要的，否则可能会导致结论的不一致。对此，我猜测进一步的研究可能揭示饱和性与其他数学性质之间更深层次的联系。

18 模型论方法在非标准分析中的应用与反思

正如前文所述，非标准分析本质上是一种模型论的应用。利用模型论中的基本工具，我们可以获得许多关于超结构的重要结论。

例如，利用紧性定理（Compactness Theorem），可以证明存在满足所有标准一阶公理的超实数系；而利用洛斯定理，我们可以证明转移原理的有效性。

19 对比总结：非标准分析与标准分析在结论上的异同

下面我试图从总体上归纳两种分析体系在某些结论上的异同：

(1) **极限理论**：两者在极限的最终结论上是一致的，但非标准分析利用无限小量的概念，使得极限过程看起来更像是一种直接的数值计算，而非抽象的 ε–δ 论证。

(2) **连续性与微分**：非标准分析将连续性与微分的定义转化为对无限小扰动的不变性检查，这种方法在直观上更易理解，但在形式化证明时必须依赖标准部分映射与转移原理。

(3) **积分与测度**：传统积分定义依赖于极限与和的概念，而非标准积分则通过无限分割与无限小量的累加给出解释。两者在计算结果上是一致的，但非标准方法在处理某些概率论问题时显得更为灵活。

(4) **逻辑基础**：标准分析依赖于完备的实数系与经典分析工具，而非标准分析则深深植根于模型论与集合论的基础之中。这使得非标准分析在某些方面具有更强的逻辑内涵，但同时也使得其入门门槛较高。