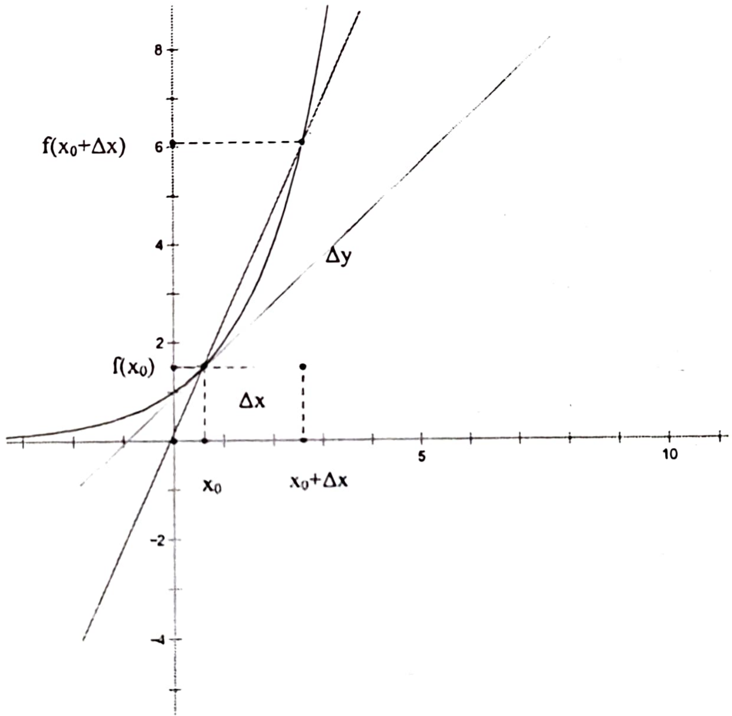
4 导数

如果我们忽略极限的精确定义，从应用 Newton 定律计算二体 Kepler 问题中仍然可以描述大概什么是导数。我们将问题几何化，Leibniz 最巨大的贡献之一就是揭示了局部意义下曲线在某点切线的斜率与曲线在该点所对应的某函数的导数的关系。



上图中，我们看到通过点 $(x_0, f(x_0))$ 和点 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 产生了一条割线，这条割线的斜率自然是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果当 $\Delta x \to 0$ 时，极限算式

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且有限，就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在导数，即

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

从图像上看，可以粗糙的理解为：存在意味着原先的割线将趋近于一条确定的直线．而有限意味着确定的直线的并不是垂直于横轴，总之就得到了一条

确定的、斜着的直线 (可以平行于横轴)。我们把这样的直线称为 $f(x)$ 在 x_0 处的切线。由此我们得到曲线在该点的切线方程

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

定义 4.1. *设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的某开邻域 $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$(就是包含 x_0 的某开区间) 上有定义。极限算式*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

如果存在且有限，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作：

$$f'(x_0), \text{或者 } f'(x)|_{x=x_0}, \text{或者 } \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \text{或者} y'(x_0), \text{或者 } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

从上面的定义中首先看到的是讨论一个函数在某点是否可导，先决条件之一是在这点的左右附近要有定义，所以我们可以讨论在某开区间 (a, b) 上的可导性，如果一个函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上的任何一点都是可导的，则我们得到开区间上的一个函数 $f'(x), x \in (a, b)$，这就是 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上的导函数。我们直接给出求导运算的各种法则以及基本初等函数的求导公式表。

定理-公式 4.1.1. *如果 f, g 均在点 x_0 处可导，则和差函数 $f \pm g$，积函数 fg 也均在点 x_0 处可导，此外如果 $g(x_0) \neq 0$，则商函数 $\dfrac{f}{g}$ 也在在点 x_0 处可导，并且有下列公式*

(i) 线性性：如果 $a, b \in \mathbb{R}$，则 $(af \pm bg) = af' \pm bg'$。

(ii) Leibniz 性：$(fg) = f'g + fg'$。

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

下面是复合函数求导法则。

定理-公式 4.1.2. *在复合函数 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 中，如果 g 在点 x_0 处可导，而 f 在点 $g(x_0)$ 处也可导，则复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 处可导，且成立下面链式求导法则：*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

此外我们还有反函数求导法则。

定理-公式 4.1.3. 设 f, f^{-1} 互为反函数，且分别在点 x_0 和 $y_0 = f(x_0)$ 处连续。如果函数 f 在点 x_0 处可导且 $f'(x_0) \neq 0$，则 f^{-1} 在点 y_0 处也可导并且

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

下面是基本初等函数求导公式表。

定理-公式 4.1.4.

(1) $C' = 0$，C 为常值函数。

(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$。

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$。

(4) 如果 $a > 0$，则 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$。

(5) $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x.$

(6) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

定义 4.2. 设函数 f 在包含 x_0 的某开区间 (a, b) 上有定义，则如果对任意的 $x \in (a, b)$ 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$，我们称 x_0 为 f 的（局部）极大值点；如果对任意的 $x \in (a, b)$ 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$，我们称 x_0 为 f 的（局部）极小值点；如果 $f'(x_0) = 0$，我们称 x_0 为 f 的驻点或者叫做临界点。

定理-公式 4.2.1. *(Fermat 引理)* 如果 f 在 x_0 处可导且为极值点，则 $f'(x_0) = 0$。 反之不真

$y = x^3$ 在 $x = 0$ 处导数为 0，但是 $x = 0$ 却不是 $y = x^3$ 的极值点，所以 Fermat 引理的逆命题并不正确。实际上 Fermat 引理给我们提供了极值点的候选者就是驻点和不可导的点，于是找出驻点和不可导的点，再逐一甄别它们就可以找到所有极值点了。如果从驻点 x_0 去寻找极值点，那么算法就是局部意义下考察 x_0 的附近的 f' 的符号是否改变，这很好理解因为 f' 变号说明局部意义下 f 在该驻点左右两边的单调性是不一致的。如果局部意义下左边单调递增而右边单调递减，也就是说局部意义下 f' 在 x_0 的左边为正而右边为负，由此得到 x_0 是极大值点；如果局部意义下左边单调递

减而右边单调递增，也就是说局部意义下 f' 在 x_0 的左边为负而右边为正，由此得到 x_0 是极小值点。

如果 f 在该驻点 x_0 处还存在二阶导数 f''，则当 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 是 f 的极小值点；当 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 是 f 的极大值点。这同样很好理解，因为 $f'(x_0)=0$，所以当 $f''(x_0)>0$ 时意味着 f' 在 x_0 附近单调递增，所以局部下 f' 在 x_0 的左边为负，而右边为正，所以局部下 f 在 x_0 的左边单调递减，而右边单调递增，所以 x_0 是 f 的极小值点。同样的道理可以说明另一件事情。

极值是局部概念，整体上看由于连续函数在闭区间 $[a,b]$ 上一定有界，所以在闭区间 $[a,b]$ 上寻找最值就是从两个端点和极值点去判别，另一些高难度的问题可能还要去寻找不可导的点。

下面我们利用导数快速去证明 Young 不等式和 Hölder 不等式以及 Minkowski 不等式。我们证明，对于 $x>0$ 有

$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leq 0, \text{当} 0<\alpha<1, \tag{1}$$

$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\geq 0, \text{当} \alpha<0 \text{或者} \alpha>1. \tag{2}$$

证明. 令 $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1$，于是 $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$，并且 $f'(1)=0$。如果 $0<\alpha<1$，则当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$; 而当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$。所以 $x=1$ 是 f 的极大值点，而且从单调性上看到，$x=1$ 是 f 的最大值点，于是 $x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leq f(1)=0$。同样的讨论可以得到第二个不等式。并且当 $x\neq 1$ 时，这两个不等式都是严格的。 □

定理-公式 4.2.2. *(Young 不等式) 如果 $a,b>0$，而 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则*

$$\begin{cases} a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leq \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b, & \text{当} p>1 \\ \\ a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geq \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b, & \text{当} p<1 \end{cases}$$

且等号成立当且仅当 $a=b$。

证明. 令 $x=\frac{a}{b}, \alpha=\frac{1}{p}$，则当 $0<\alpha<1$ 时，也就是 $p>1$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}\frac{a}{b}+\frac{1}{p}-1\leq 0,$$

在上方不等式中两边同乘以 b 后得到

$$a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}a+(\frac{1}{p}-1)b\leq 0,$$

令 $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$，移项后得到

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leq \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b.$$

同样的事情可以得到第二个不等式。 □

积分形式：

$\int_a^b f(x)g(x)dx$

$\leq (\int_a^b f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b g^q(x)dx)^{\frac{1}{q}}$，$p>1$

二式易然（这两个式子是我猜的）

这么说积分的 Hölder 不等式也可以这个证法，没想到这么 trivial.

定理-公式 4.2.3. *(Hölder 不等式)* 设 $x_i,y_i\geq 0,i=1,2,\cdots,n$，而 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。则

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i\leq\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{当} p>1\\ \sum\limits_{i=1}^n x_iy_i\geq\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{当} p<1\end{cases}$$

证明. 我们利用 Young 不等式，令

$$a=\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^p},b=\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^q},$$

于是当 $p>1$ 时

$$\left(\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^q}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{p}\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^p}+\frac{1}{q}\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^q},$$

也就是

$$\frac{x_iy_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\frac{1}{p}\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^p}+\frac{1}{q}\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^q},$$

我们把所有的不等式关于 $i=1,2,\cdots,n$ 加起来，得到

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

同样的道理可以说明第二个不等式。 □

当 $p=q=2$ 时，Hölder 不等式的特例时 Cauchy-Buniakowsky-Schwarz 不等式。

定理-公式 4.2.4. *(Minkowski 不等式)* 设 $x_i, y_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n$，则

p=2时即为三角不等式

$\sqrt{(x_1+x_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2}$

$\leq \sqrt{x_1^2+\cdots x_n^2} + \sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{当} p>1 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{当} p<1, p\neq 0 \end{cases}$$

证明. 令 $1-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q}$，于是 $p+q=qp, p=qp-q$。注意

$$\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i+y_i)^{p-1}.$$

当 $p>1$ 时，对上式右端两项分别使用 Hölder 不等式我们得到

$$\sum_{i=1}^n x_i(x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left((x_i+y_i)^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{i=1}^n y_i(x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left((x_i+y_i)^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

但是由于 $qp-q=p$，所以

$$\sum_{i=1}^n \left((x_i+y_i)^{p-1}\right)^q = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p,$$

所以我们得到

$$\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

在上式两端同时除以 $\left(\sum\limits_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$，就得到 Minkowski 不等式，同样的道理可以证明第二个。 □

4.3 下凸函数和 Jensen 不等式

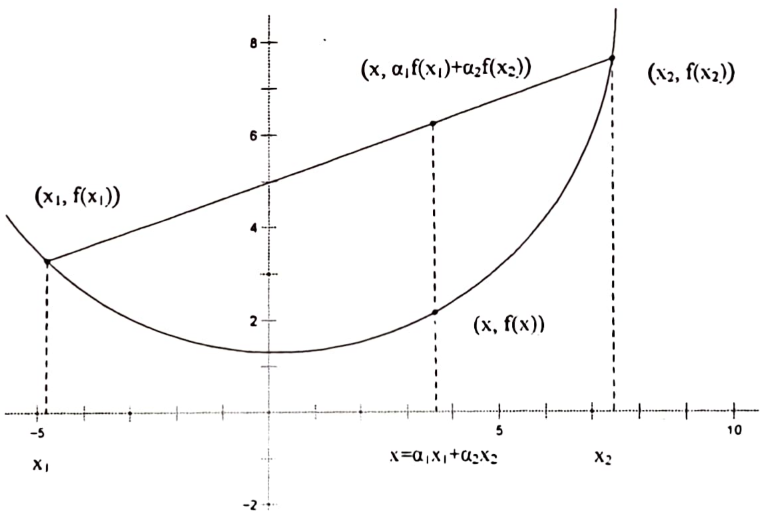
定义 4.4. *(下凸函数)* 设函数 f 在开区间 (a,b) 上有定义，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 以及任何满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 的非负实数 α_1, α_2，恒有下列不等式

$(x_1,f(x_1))$ 到 $(x_2,f(x_2))$ 连线上的点的横坐标

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

连线上点的纵坐标

我们就称 f 在 (a,b) 上是下凸的。如果不等式的方向是相反的，我们就称之为上凸的。



或者简言之，这个函数是凸的 (你认为它是否凸还是凹取决于你处在的观察位置，下凸意思就是从下方开始观察是凸出来一块)，用这个术语时候需要小心，最好写明是下凸还是上凸的，因为上凸和下凸会成立相反的不等式。凸函数这个词源本身来自于凸集，事实上从不等式中可以发现集合

$$E = \{(x,y) : x \in (a,b), f(x) < y\}$$

确实是凸集！

设 $a < x_1 < x < x_2 < b$，由于关系式

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

所以我们得到

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

因此原先下凸函数的定义中可以改写为

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

考虑到 $a < x_1 < x_2 < b$，于是

$$(x_2 - x_1)f(x) \le (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

我们将初等变换 $x_2 - x_1 = x_2 - x + x - x_1$ 代入这个不等式中得到

$$(x_2 - x)f(x) - (x_2 - x)f(x_1) \le (x - x_1)f(x_2) - (x - x_1)f(x),$$

不等式左右两边同时除以 $(x_2 - x)(x - x_1)$，我们得到

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

现在我们假设函数 f 在开区间 (a, b) 上可导，因为极限具有保号性，所以从上方的不等式中我们得到两个不等式：

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \le \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2),$$

所以结合上面第一个不等式的最右端和第二个不等式的最左端，我们看到 $f'(x_1) \le f'(x_2)$，这件事告诉我们可导的下凸函数 f，它的一阶导函数 f' 是单调递增的，如果还存在二阶导数，则 $f'' \ge 0$。事实上这个条件不仅是必要的，也是充分的，充分性需要 Lagrange 定理，这里我们不去展示。也就是说我们得到下列定理

定理-公式 4.4.1. 设 f 在开区间 (a, b) 上可导，则 f 在 (a, b) 是下凸的当且仅当一阶导函数 f' 在 (a, b) 上单调递增。

定理-公式 4.4.2. 设 f 在开区间 (a, b) 上二阶可导，则 f 在 (a, b) 是下凸的当且仅当二阶导函数 f'' 在 (a, b) 上非负。

练习 4.4.3. 请检验幂函数 $y = x^\alpha$，指数函数 $y = a^x$，对数函数 $y = \log_a x$，正弦函数 $y = \sin x$ 的下凸区间和上凸区间，如果它们存在的话。

我们指出几何上切线和下凸函数的重要关系，我们省略这个证明，你可以从图上发现这件事。

定理-公式 4.4.4. 设 f 在开区间 (a, b) 上可导，则 f 在 (a, b) 上是下凸的当且仅当 f 图像上所有点都不会位于该图像的任何一条切线之下。

应用上面的定理完成下方的问题。

练习 4.4.5. 证明：对任何 $x \in \mathbb{R}$，恒有

$y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处切线方程：

$$e^x \geq 1 + x.$$

$y-1 = e^0(x-0)$

$\Rightarrow$ ~~e^x~~ $y=x+1$

练习 4.4.6. 证明：对任何 $x > 0$，恒有

$\because e^x$ 下凸 $\therefore e^x \geq 1+x$

$$\ln x \leq x - 1.$$

下面重新回到下凸函数的定义，我们来证明 Jensen 不等式。

定理-公式 4.4.7. 如果 f 在开区间 (a, b) 上是下凸函数，$x_i \in (a, b), i = 1, 2, \cdots, n$，且非负实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$，则以下不等式成立：

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

证明. 我们对 n 采用归纳法证明。

基础步 $n = 2$ 时显然为真，因为这个不等式就是下凸函数的定义。

关于归纳步，如果 $n - 1$ 步为真，下面我们来验证第 n 步也真。设 $\beta = \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，于是 $(\beta = 1 - \alpha_1)$

$$\frac{\alpha_2}{\beta} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1.$$

根据归纳假设，也就是第 $n - 1$ 步为真，我们得到

$$f(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n) \leq \frac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} f(x_n).$$

注意 $\alpha_1 + \beta = 1$，所以我们得到 Uraa!

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) &\leq \alpha_1 f(x_1) + \beta f(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + \beta \left(\frac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} f(x_n) \right) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \end{aligned}$$

$\alpha_1 x_1 + \beta y$

$\beta y = \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$

□

4.5 练习

练习 4.5.1. 直线 $y=ax+2$ 与曲线 $y=x^3-ax$ 有三个不同的交点，计算 a 的取值范围。

练习 4.5.2. 设 $a>0$，求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)$，$(x\in(0,+\infty))$ 的单调区间。

练习 4.5.3. 计算 $y=\sin^2 x\cos x$ 在开区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上的最大值。

练习 4.5.4. 设 $a=0.1e^{0.1}, b=\dfrac{1}{9}, c=-\ln 0.9$，比较 a,b,c 的大小。

练习 4.5.5. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有两个极值点 x_1,x_2。如果 $f(x_1)=x_1<x_2$，计算关于 x 的方程

$$3\left(f(x)\right)^2+2af(x)+b=0$$

的实根个数。

练习 4.5.6. 设 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\dfrac{e^x}{x}, f(2)=\dfrac{e^2}{8}$，证明当 $x>0$ 时，$f(x)$ 不存在极值。

练习 4.5.7. 构造合理的辅助函数，比较下列实数的大小 $e^3,3^e,e^\pi,3^\pi,\pi^3$ 的大小。

练习 4.5.8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$。

(1) 求 $f(x)$ 解析式以及单调区间；

(2) 如果

$$f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+ax+b,$$

计算 $(a+1)b$ 的最大值。

练习 4.5.9.

(1) 设 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$，求 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上最小值。

(2) 设正实数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^n}=1$，证明：

$$\sum_{i=1}^{2^n}p_i\log_2 p_i\geq -n.$$

练习 4.5.10. 设实数 $a_i, b_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 均为正数，证明

(1) 如果

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i} \le 1.$$

(2) 如果 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$，则

$$\frac{1}{n} \le \prod_{i=1}^{n} b_i^{b_i} \le \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

练习 4.5.11. 设 $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$，计算

$$\frac{9}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos x \cos y \sin^2 y}$$

的最小值。

练习 4.5.12. 设 m 为大于 1 的正整数，函数 $f(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^m$。证明：对任意的 $x \in [0, \frac{m-1}{m}]$，恒有

$$e^{\frac{1}{2m}} f(x) < 1$$

练习 4.5.13. 设 $a > 0$，函数 $f(x) = x \ln x - \frac{ax^3}{3} + 2x$。

(1) 如果 $f(x) \le 1$，计算 a 的最小值。

(2) 如果 $f(x)$ 存在最小值，计算 a 的取值范围。

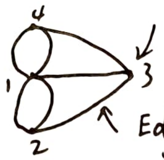
Euler 定理：

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(2) 设 a.m 为整数，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$，$\varphi$为欧拉函数

(推广的 Fermat小定理 ： $a^p \equiv a \mod p$)

(3) 七桥问题 (一笔画问题)



Vertices 顶点

Edges 边

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{1\text{-}2, 1\text{-}2, 1\text{-}3, 2\text{-}3, 3\text{-}4, 1\text{-}4, 1\text{-}4\}$

导数及函数不等式

1. 导数定义 (ε-δ)

设 $f(x)$在包含 x_0的某开区间中 (a,b) 有定义，如果下列极限算式 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 存在且有限，称 $f(x)$在 x_0 处可导且把 $\lim_{\Delta x \to 0}$ …… 叫作 f在 x_0处导数。

(Бу, биндуши уаньщань ийитанд ε-δ, он нет йон ε-неидоухуд диний Цзищань. Каньлай он цжонцзюй хайши дуганъ.)

2. 切线方程 $(x_0, f(x_0))$

$l: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (导数是局部概念)

3. 定理：如果f, g在 x_0 处可导，则

① $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $f \pm g$, $af \pm bg$ 皆在 x_0处可导且 $(af \pm bg)'(x_0) = af'(x_0) \pm bg'(x_0)$ (线性性)

② $f \cdot g$ 在 x_0 处可导且 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Leibniz性)

练习：(1) $y = \ln(\sin x - \cos x)$

解：$y' = \frac{1}{\sin x - \cos x} \cdot (\cos x + \sin x)$

(2) $y = \tan^3 x + \sin x \cdot \cos\frac{1}{2}x$

解：$y' = 3\tan^2 x \sec^2 x + \cos x \cos\frac{1}{2}x + \sin x \cdot (-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x)$

$= 3\tan^2 x \sec^2 x + \cos x \cos\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \sin\frac{1}{2}x$

(3) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + x^{-\frac{1}{9}}$

解：$y' = (\tan x)' \sin x + \tan x \cos x - \frac{1}{9}x^{-\frac{10}{9}}$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x - \frac{1}{9}x^{-\frac{10}{9}}$

(4) $y = 24^{\sin x + e^x}$

解：$y' = 24^{\sin x + e^x} \ln 24 \cdot (\cos x + e^x)$

(5) $y=\tan x$

解：$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

(6) $y=\cancel{\ } e^{e^{e^{\sin x}}}$

解：$y'=e^{e^{e^{\sin x}}}e^{e^{\sin x}}e^{\sin x}\cos x$

(7) $y=x^x$

解：$y'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=x^x\ln x+x^x$

(8) $y=f(x)^{g(x)}$，$f(x)$ 为正函数

解：~~y~~ $\ln y=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$

$\therefore\ \frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\therefore\ y'=f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

例：设 $f(x)=\ln(x+\sin x)$，设计算 $f^{-1}(x)$ 在 $(\ln(\frac{\pi}{2}+1),\frac{\pi}{2})$ 切线方程

(OH to saŭ mŭl∃，$f(x)=\ln(x+e^x)$，$B(\ln(1+e),1)$)

解：$(f^{-1})'(\ln(1+e))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{(1+e)}{(1+e)\cancel{(1+e)}}=1$

$\therefore\ l:\ y-1=x-\ln(1+e)$

Note：如下函数：点 $(x_0,f(x_0))$ 不可使用反函数导数定理

因为该点在局部范围内无反函数

n阶导 (Lebniz公式)：$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$

事实：如 f 在 (a,b) 上可导

(1) $f'(x)>0\ \Rightarrow\ f$ 严格↑

(2) $f'(x)\geq 0\ \Rightarrow\ f$ ↑

(3) $f'(x)\geq 0$ 但只有有限个 x 使得 $f'(x)=0\ \Rightarrow\ f$ 严格↑

(当然有无数个 $f'(x)=0$ 也可能严格↑，)

如果二阶导判别法失败 ($f''(x_0)=0$)，则用一阶导判别：

	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
f'	$+/-$	0	$+/-$	0	$-/+$
f	↗/↘		↘/↗		↗/↘

即判断区间内 f' 正负

例：证明 $\forall x\in\mathbb{R}$，恒有 $e^x\geq 1+x$

证明：令 $f(x)=e^x-1-x$

$f'(x)=e^x-1=0\ \Rightarrow\ x=0$

$\therefore\ x=0$ 为唯一驻点　$\because\ f''(0)=1>0\ \therefore$ 为极小值

由单调性可知，也为最小值　$\because\ f(0)=0\geq 0$

$\therefore\ e^x\geq 1+x$

例：$a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，比大小

解：$f(x)=xe^x$，$g(x)=\frac{x}{1-x}$ $\quad\therefore a=f(0.1)$，$b=g(0.1)$

令 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=(1-x)e^x$，$x\in(0,1)$

$F'(x)=e^x-xe^x-e^x=-xe^x=0 \Rightarrow x=0$

$x\in(-\infty,0)$ 时，$F'(x)>0$，$x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$

$\therefore x=0$ 为最大值点

$\therefore F(0.1)=\frac{a}{b}<F(0)=1 \quad \therefore a<b$

$c=-\ln 0.9 = -\ln(1-0.1)$

设 $h(x)=-\ln(1-x)$

令 $G(x)=f(x)-h(x)=xe^x+\ln(1-x)$

$G'(x)=xe^x+e^x-\frac{1}{1-x}=0 \Rightarrow e^x=\frac{1}{1-x}$

$\because e^x\geqslant 1+x$，下面只要证 $1+x\geqslant\frac{1}{1-x^2}$。不妨令 $x\in[0,1)$

即 $(1+x)^2\geqslant\frac{1}{1-x}$。令 $H(x)=(1+x)^2(1-x)$，$H'(x)=2(1+x)(1-x)-(1+x)^2=0$

$\therefore$ 驻点为 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{3}$。在 $(-1,\frac{1}{3})$ 上，$H'(x)>0$，↑

$\therefore x\in[0,\frac{1}{3})$ 时，$H(x)\geqslant H(0)=1$ → 这两式均只在 $x=0$ 时取等

$\therefore x\in[0,\frac{1}{3})$ 时，$e^x\geqslant\frac{1}{1-x^2}$，即 $G'(x)\geqslant 0$，↑

$\therefore G(0.1)>G(0)=0 \quad \therefore f(0.1)>h(0.1)$，即 $a>c$

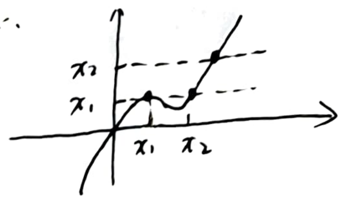
$\therefore c<a<b$

Ex. 4.5.5

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$，其解为 x_1，x_2

$3(f(x))^2+2af(x)+b=0$，其解为 $f(x)=x_1$ 或 $f(x)=x_2$ 的所有 x

$\therefore$



$\therefore$ 由图可知，有3个

凸性

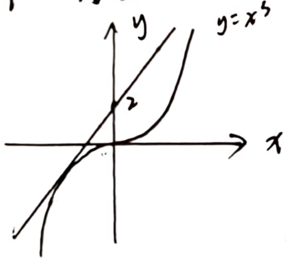
凸集：$\mathbb{R}^2$上凸集指，$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$，则连接两点的线段$\in S$

线段的集合表示：$\{(m_1,n_1)=\alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_2(x_2,y_2),\ \alpha_1+\alpha_2=1,$
$\alpha_1,\alpha_2\geq 0\}$

Ex. 4.5.1（南大2022强基）

$y=x^3-ax$ 与 $y=ax+2$有三个不同交点，求a取值

解：方程$x^3-2ax-2=0$有三个不同根，即$x^3=2ax+2$有三个不同根



如图，$y=2ax+2$ 与 x^3上某点相切时，恰有2个

$y-y_0=3x_0^2(x-x_0)\Rightarrow -3x_0^3+y_0=2$

$x_0=-1$ 此时 $a=3/2$

$\therefore\ a\in(\frac{3}{2},+\infty)$

Ex、证明：$(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

证明：$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上上凸

$\therefore\ \alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2\leq\ln(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)$，$\alpha_1+\alpha_2=1$，$\alpha_1,\alpha_2\geq 0$

$\therefore\ \ln x_1^{\alpha_1}+\ln x_2^{\alpha_2}\leq\ln(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)$

$\therefore\ x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\leq\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$

$\therefore\ \alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$时，有$(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

如果想由上推广到对n个数的均值不等式，则需借助Jessen不等式：

Th. $f(x)$在(a,b)上下凸，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$，$\alpha_i\geq 0$，则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_if(x_i)$$

证明见讲义。

例5. $f(x)=x^p$，$x>0$，$p>1$，检验f是否下凸，由此证Hölder不等式。

证明：$f'(x)=px^{p-1}$　　$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$

$\therefore$ 是下凸。

$p>1$，令$q=\frac{p}{p-1}$，$\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$，则有$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

令$\alpha_i=\frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^{n}b_k^q}$，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$

$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_if(x_i)$

$\therefore\ \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\right)^p\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^p$，$\alpha_i=\frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^{n}b_k^q}$，令$x_i=\cancel{\alpha_i\sum_{k=1}^{n}b_k^q}\ b_i^{\wedge}\frac{1}{p-1}$

$$\therefore \left(\cancel{\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}}\cdot\frac{a_i\cancel{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}}{b_i^{\wedge}\frac{1}{p-1}}\right)^p \le \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}\cdot\left(\frac{a_i\sum_{k=1}^{n} b_k^q}{b_i^{\wedge}\frac{1}{p-1}}\right)^p$$

$\frac{b_i^q}{b_i^{\frac{1}{p-1}}} = b_i^{\wedge}(q-\frac{1}{p-1}) = \frac{p-1}{p-1} = 1$，左 $= (\sum_{i=1}^{n} b_i a_i)^p$

右边 $= \sum_{i=1}^{n} a_i^p \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{p-1}$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{p-1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}$

习题：用 $y=x^2$ 证明柯西不等式

Ex. 4.5.3 求 $y=\sin^2 x\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上最大值

解：设 $t=\cos x$，$\cos x \in (0,1)$

$\therefore y' = (1-t^2)t = t-t^3 = 1-3t^2 = 0 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 最大为 $(1-\frac{1}{3})\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

Ex. 4.5.6 $x^2f'(x)+2xf(x) = \frac{e^x}{x}$，$f(2)=\frac{e^2}{8}$，证明 $x>0$ 时 $f(x)$ 无极值

证明：$4f'(2)+\frac{e^2}{2}=\frac{e^2}{2}$，$f'(2)=0$

$(x^2f(x))' = x^2f'(x)+2xf(x) = \frac{e^x}{x}$

（Щуань ши чже на цзифень：$x^2f(x) = \int\frac{e^x}{x}dx$

$\int\frac{e^x}{x}dx = e^x/x + \int\frac{e^x}{x^2}dx$，Хаошуэн душуин, цзаоль）

令 $g(x)=x^2f(x)$，$f(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$\therefore f'(x) = (g'(x)x^2 - g(x)\cdot 2x)/x^4 = \frac{e^x-2g(x)}{x^3}$

令 $h(x)=e^x-2g(x)$，$h'(x)=e^x-2g'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x}=0 \Rightarrow x=2$

$\therefore x=2$ 时，$h(x)$ 最小 $\because f(2)=\frac{e^2}{8}$ $\therefore g(2)=\frac{e^2}{2}$

$\therefore e^2-2\cdot\frac{e^2}{2}>0$ $\therefore f'(x)>0$

$\therefore$ 无极值。

Ex 4.5.9 (2)

令 $f(x)=\log_2 x$，易知 $f(x)$ 上凸且递增

$\therefore \sum_{i=1}^{2^n} p_i f(p_i) \ge f(\sum_{i=1}^{2^n} p_i^2) \ge f((\sum_{i=1}^{2^n} p_i/2^n)^2\times 2^n)$

$= f(\frac{1}{2^n}) = -n$ 上凸函数应是 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\le f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)$

订：令 $f(x)=x\log_2 x$，则 $f''(x)=\frac{1}{x\ln 2}>0$ $\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上下凸

$\frac{1}{2^n}\times\sum_{i=1}^{2^n} f(p_i) \ge f(\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} p_i) = \frac{1}{2^n}\log_2\frac{1}{2^n} = -\frac{n}{2^n}$

$\therefore \sum_{i=1}^{2^n} p_i f(p_i) \ge -n$

Ex. 4.5.7 比大小：e^3，3^e，e^π，π^3，3^π，π^e

解：令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$，驻点 $x=e$

$f'(e) = 0$，$x<e$ 时，$f'(e)>0$，↑，$x>e$ 时 $f'(e)<0$，↓

$\because$ $e<3<\pi$ $\therefore$ $\frac{\ln e}{e} < \frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln \pi}{\pi}$

$\therefore$ $e^3 > 3^e$，$3^\pi > \pi^3$，$e^\pi > \pi^e$

$\therefore$ $3^\pi > \pi^3 > e^3 > 3^e$

下面比较 e^3 和 π^e，

$f_{max} = f(e) = \frac{1}{e}$ $\therefore$ $f(\frac{e^2}{\pi}) < \frac{1}{e}$

$\therefore$ $\frac{\ln \frac{e^2}{\pi}}{\frac{e^2}{\pi}} < \frac{1}{e}$ $\therefore$ $-\ln\pi + 2 < \frac{e}{\pi}$

$\therefore$ $e(2-\frac{e}{\pi}) < e\ln\pi = \ln\pi^e$

$\therefore$ $3 < 2.7(2-\frac{2.72}{3.14}) < \ln\pi^e \Rightarrow 3<\ln\pi^e$

$\therefore$ $e^3 < \pi^e$

$\therefore$ $3^\pi > \pi^3 > \pi^e > e^3 > 3^e$ 下面比较 e^π 和 π^3 大小

$\cancel{3(2-\frac{e}{\pi}) < 3\ln\pi = \ln\pi^3}$

$3(2-\frac{e}{3}) < 3(2-\frac{e}{\pi}) < 3\ln\pi = \ln\pi^3$

$\because$ $3(2-\frac{e}{3}) > 3(2-\frac{2.7}{3}) = 3.3 > \pi$

$\therefore$ $\pi < \ln\pi^3$ $\therefore$ $e^\pi < \pi^3$

$\therefore$ 综上，$3^\pi > \pi^3 > e^\pi > \pi^e > e^3 > 3^e$