勒贝格积分和黎曼积分的对比

1 黎曼积分的定义及性质

1.1 黎曼积分的基本定义

今天我们从最基本的概念讲起，讨论黎曼积分。我们知道，黎曼积分的核心思想在于将区间分割成若干小区间，然后对每个小区间选取一个样本点，将函数值与小区间长度相乘后求和，最终取极限。具体来说，设有区间 $[a,b]$，任取一个分割

$$P: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

对于每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$，令 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则对应的黎曼和为

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

若当分割的细度趋向于零时，所有可能的黎曼和收敛到一个唯一的数值 I，则称 f 在 $[a,b]$ 上可积，并定义

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

在这个过程中，我们常常会讨论上、下和的概念，即上黎曼和

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

以及下黎曼和

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P 使得 $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$，则称 f 为黎曼可积。同学们，这里请注意：这种定义方式需要函数在区间上具有某种均匀的“平滑性”，否则可能无法通过分割逼近积分值。

1.2 黎曼积分的性质与局限

我们在课堂上已经讨论过一些黎曼积分的重要性质，如线性性、区间可加性以及积分的有限性等。具体地，对于两个黎曼可积函数 f 和 g 以及常数 c，有：

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

然而，黎曼积分也存在一些局限性。最典型的例子是关于不可积函数的讨论：例如，设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}\cap[0,1], \\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

即使这个函数在直觉上“分布均匀”，但由于其在任意子区间内同时取得最大值和最小值，导致上、下和之差始终为 1，从而证明 f 在 $[0,1]$ 上不可积。这也启发我们思考：当函数有太多不连续点时，传统的黎曼积分方法便会失效。

同时，我们也可以看到，黎曼积分依赖于区间的分割和“样本点”的选取，这种方法在处理某些极限问题时显得不够灵活。例如，当涉及极限交换或无穷积分时，我们常常会遇到一些技术困难。正因如此，我们后来发展出另一种积分理论，即勒贝格积分。

2 勒贝格积分的定义及性质

2.1 从测度论出发的定义

相比黎曼积分，勒贝格积分从根本上采用了测度论的思想。我们首先要引入可测集和测度的概念。简单地说，设 $(X,\mathscr{M},\mu)$ 是一个测度空间，其中 $\mathscr{M}$ 为 X 上的 σ-代数，μ 为测度。一个函数 $f: X\to\mathbb{R}$ 被称为可测的，若对于任意实数 α，集合 $\{x\in X \mid f(x)>\alpha\}$ 属于 $\mathscr{M}$。

勒贝格积分的构造大致分为两个步骤：首先对非负简单函数（即有限个值函数）进行积分定义，再通过极限过程推广到一般的可测函数。对于非负简单函数

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x),$$

定义其积分为

$$\int_X \varphi\,d\mu = \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i).$$

接下来，对于任意非负可测函数 f，定义

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu \mid 0 \le \varphi \le f,\, \varphi \text{ 为简单函数}\right\}.$$

而对于一般可测函数，则写成正负部分之差，从而完成积分的定义。

需要注意的是，勒贝格积分在定义过程中引入了“测度”这一概念，这与我们之前在黎曼积分中仅仅依赖区间长度的做法截然不同。现在我们突然发现，这里的 σ-代数和测度的概念，在之前的高中数学中几乎没有接触过，因此，我们不得不从零开始构建这套理论。当然，这里我只做一个简单的铺垫，详细的测度论内容将留待更高年级或者专门的分析课程中讨论。

2.2 勒贝格积分的优点与灵活性

勒贝格积分的优势在于它能够处理更多类型的函数，即使函数在大部分点上极不连续，也可以给出合理的积分定义。例如前面提到的狄利克雷函数，在黎曼意义下不可积，但在勒贝格意义下，由于有 $\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$，其积分结果恰好为 0。

更进一步，勒贝格积分具有极好的极限交换性质。著名的**单调收敛定理**与**受控收敛定理**正是建立在这一优点之上：

单调收敛定理： 设 $\{f_n\}$ 为非负可测函数列且 $f_n \uparrow f$，则有 $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$

受控收敛定理： 若 $f_n \to f$ 几乎处处且存在可积函数 $g \ge 0$ 使得 $|f_n| \le g$，则 $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$

这些定理使得勒贝格积分在处理级数、极限以及交换积分与求和顺序的问题上比黎曼积分更为优越。

2.3 简单函数与积分构造的思想

在构造勒贝格积分时，我们强调通过简单函数逼近可测函数。这种方法体现了一种“分层逼近”的思想：先处理最简单的情况，再通过极限将结果推广到复杂情形中。比如说，我们可以把任何一个非负可测函数看作是由无数个简单函数的“积木”构成的，而这些简单函数每一块都是易于计算的。正如数学中的“先易后难”原则，这种分解思想在很多领域都有体现。

事实上，我曾在 MathStackExchange 上看到过这样一个问答，有人提出“为何不能直接对复杂函数积分，而必须借助简单函数逼近？”回答者指出，简单函数逼近不仅使理论严谨，同时也为数值计算提供了一种可能的方法。虽然这个解释可能略显学究气，但从本质上揭示了勒贝格积分的构造思想。（参见 MathStackExchange 相关讨论）

3 黎曼积分与勒贝格积分的对比

在本节中, 我们将从多个角度详细比较黎曼积分与勒贝格积分, 力图揭示二者在定义、性质、应用及理论深度上的差异和联系。

3.1 定义方式的根本差异

首先，二者的定义出发点截然不同。黎曼积分依赖于区间分割与样本点选取，其核心在于对区间进行划分，注重区间内函数值的“局部表现”。而勒贝格积分则依赖于测度理论，核心在于函数值在不同“层次”上的分布情况。具体来说：

- **黎曼积分：** 通过对区间 $[a, b]$ 的划分，以及在每个子区间中取一个点 ξ_i，将函数值与子区间长度相乘后求和，再取极限得积分值。
- **勒贝格积分：** 先将函数看作是分布在值域上的“散点”，然后对这些点的集合（即预像）进行测度计算，再将这些测度乘以相应的函数值求和或积分。

由此，我们可以看出，黎曼积分更侧重于区间的“几何”划分，而勒贝格积分则侧重于“集合”的测度分解。

3.2 可积性条件与适用范围

黎曼积分要求函数在区间上“差不多连续”，即要求不连续点的集合具有零测度。这样一来，对于那些在区间上具有“稠密”不连续点的函数，黎曼积分往往会失败。举个例子，前文中的狄利克雷函数在黎曼意义下不可积，而勒贝格积分则可以处理此类函数，因为其不连续点集合的测度为零。

此外，勒贝格积分允许对无穷区间、无穷函数进行积分，只要满足相应的收敛条件，如可积性或局部可积性。黎曼积分在这方面则显得较为局限。因此，在处理广义函数、概率论中的随机变量积分等问题时，勒贝格积分显得更为灵活和强大。

3.3 极限交换与积分理论的优势

在数学分析中，经常需要处理极限与积分的交换问题。黎曼积分在这方面存在许多限制，只有在严格的条件下才能保证交换极限与积分的正确性。而勒贝格积分由于具备单调收敛定理、受控收敛定理等强大工具，使得我们在处理极限问题时更加得心应手。

例如，考虑函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 f。若 f_n 为非负函数且单调递增，则根据单调收敛定理，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

而如果采用黎曼积分，由于积分定义依赖于分割，极限交换常常需要额外的假设，这在实际应用中是一个巨大的缺陷。

3.4 数值计算与实际应用中的差异

在实际计算中，黎曼积分的方法较为直观，适用于中小学乃至本科初级课程中的基本积分计算问题。然而，当函数复杂度增加或者积分区间扩展到无穷时，黎曼积分的计算方法就显得不够稳健。勒贝格积分虽然理论上更为完备，但其计算方法通常涉及到对测度的求解和复杂的极限过程，因此在数值计算中需要借助专门的数值算法。

有趣的是，我突发奇想，也许可以将两者结合起来，构造一种“混合积分”方法，在保证理论严谨的同时，也兼具数值计算的实用性。不过，这只是我的一种猜测，目前尚无严格的理论支持，我猜测这种方法如果存在，可能会在未来的数值分析中发挥作用。

3.5 直观理解与抽象思维的对比

黎曼积分的定义和计算依赖于直观的几何概念，如区间划分、矩形面积的求和等，适合用来培养直观思维。而勒贝格积分则要求我们从集合论、测度论的角度去看待问题，这种抽象的思维方式需要更高的数学素养。正因如此，初学者往往会觉得勒贝格积分较为晦涩难懂，但一旦掌握了测度的基本概念，就会发现其内在逻辑之美。

这正好体现了数学从具体到抽象的发展过程。从初等几何到抽象代数，再到现代分析，每一步都是对直观认识的升华。正如我们在课堂上讨论的那样，“数学之美，在于发现无穷中蕴含的普适规律”。

4 高级联想与疑问探讨

在对比黎曼积分与勒贝格积分的过程中，我不禁联想到数学分析中许多其他相关的理论和方法，这里我将记录下自己的思考过程和一些试探性的联想。

4.1 测度论与点集拓扑的关联

当我们引入测度论后，便不可避免地需要讨论可测集和拓扑空间的关系。实际上，在某些情形下，测度论可以看作是对拓扑结构的一种“数值化”描述。比如，我们常常会用外测度来定义 Lebesgue 可测性，而外测度的定义本身就与集合的覆盖性质密切相关。

现在我们突然发现，这里的覆盖定理与高中学过的紧致性定理有某种微妙的联系。虽然二者在形式上大不相同，但都涉及到如何用“小块”去覆盖整个空间的思想。由此，我猜测在更高层次的拓扑学研究中，或许能找到一种统一的语言来描述这些现象。这种联想虽然尚未严谨证明，但给我带来了不少启发。

4.2 抽象代数学与积分理论的潜在联系

在深入研究积分理论的过程中，我突发奇想，也许可以借助抽象代数学的工具来重新审视积分的本质。我们知道，在代数拓扑中，常常借助同调理论和 CW 复形来研究空间的结构；而在范畴论中，自然变换和函子提供了一种统一描述不同数学对象关系的方式。是不是可以将积分看作是一种“测度函子”，从而在更高的抽象层次上统一讨论不同的积分定义?

例如，设 F 是一个从某个拓扑空间的测度空间构成的范畴到实数域的函子，那么勒贝格积分在某种意义上可以看作是该函子的一个具体实现。虽然这种观点目前还处于初步猜想阶段，但我认为如果能够构造出这样的理论框架，可能会对解决极限交换、积分不变性等问题提供新的思路。

在 MathOverflow 上也有一些讨论涉及到类似的观点，虽然讨论内容较为前沿且抽象，但其中的一些问题和回答让我意识到，数学中的各个分支之间其实存在着深层次的联系。这种联系或许能为我们理解积分理论提供全新的视角。

4.3 数值算法与实际应用中的思考

从数值计算的角度来看，黎曼积分由于其直观的几何意义，容易被离散化，从而形成各种数值积分方法，如梯形公式、辛普森公式等。而勒贝格积分则因为其定义依赖于测度理论，使得直接离散化变得困难。不过，这并不意味着勒贝格积分在数值计算中没有应用。实际上，现代数值分析中有不少方法正是基于概率论与随机采样（如蒙特卡罗方法）来近似求解勒贝格积分。

我曾经在 Matlab 中试验过利用随机采样求解某些复杂函数的积分问题，发现当函数存在大量局部振荡或奇异点时，蒙特卡罗方法往往能给出比传统确定性方法更稳定的结果。这

让我意识到，在某种意义上，概率论和测度论是密不可分的。虽然这里我仅仅是做了一些初步的数值试探，但这些经验无疑为进一步的理论研究提供了有价值的启示。

4.4 对极限与交换问题的疑问

在讨论极限交换问题时，我们常常会遇到如下情形：设 $\{f_n\}$ 是一列函数，其在某种意义下收敛于 f，那么如何证明

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim_{n\to\infty}f_n?$$

在黎曼积分的背景下，这一交换往往需要额外条件，如一致连续性或者有限的不连续点集；而勒贝格积分则利用了单调性或控制条件使得交换成为可能。然而，这里的严格证明过程并非易事，有许多细节需要斟酌。我猜测，在处理一些更为复杂的函数列时，可能还需要引入其他工具，如 Fatou 引理、反 Fatou 引理等。

在这一过程中，我曾多次尝试写出证明，但总觉得在某些细节上略有疏漏。经过反复推敲与查阅相关文献，我认为目前主流的证明方法已经相当严谨，但对于某些极端情况仍可能存在争议。正因为如此，我在笔记中采用了较为保守的表述方式，诸如“我猜测”、“也许可以”等，以表示这一部分内容仍存在探索空间。

5 讨论中的试探与思考过程

在这部分内容中，我将详细记录自己在理解和比较黎曼积分与勒贝格积分过程中遇到的疑问、试错过程以及一些偶发的联想。这里既包括成功的思路，也包括那些曾经让我困惑的地方，力求还原一个真实的思考过程。

5.1 初识积分概念时的迷茫

记得在初次接触黎曼积分时，我曾经对“分割取极限”的思想感到非常困惑。为何简单地将区间划分、求和、取极限就能给出一个函数的“面积”？经过反复思考和与同学讨论，我逐渐理解到，这种方法实际上是一种对函数在局部行为的近似描述。每个小矩形的面积虽然并不能完美刻画曲线下的真实面积，但当分割无限细时，它们的总和却无限接近于真实值。

然而，当我接触到勒贝格积分后，这种思考方式被彻底颠覆了。勒贝格积分不再关注区间本身，而是关注函数取值的“分布”。这使得我突然意识到：我们之前对“面积”的直观理解其实是一种局限，积分的本质更应看作是对“分布”的累加。我猜测，这种转变正是现代分

析学发展的一个重要标志，它不仅解决了许多黎曼积分无法处理的问题，同时也为后来的概率论、泛函分析等领域提供了坚实基础。

5.2 试图用简单函数逼近的一次失败尝试

在学习勒贝格积分的过程中，我曾试图用简单函数直接逼近一个具有复杂振荡行为的函数，但很快发现，这种方法在具体计算中往往会遇到收敛速度太慢的问题。记得有一次，我尝试将函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

分解为一系列简单函数的和。虽然理论上可以证明其勒贝格积分存在，但在实际构造简单函数序列时，却发现每一项的误差积累得相当严重。这让我深刻体会到，理论与实际之间总有一道鸿沟，有时理论上完备的构造在数值实现上可能并不理想。

经过这一失败的尝试，我开始反思：是否存在一种更为有效的方法来近似这种复杂函数的积分？后来，我阅读了一些关于数值积分的文献，了解到在这种情形下，利用随机采样与概率论方法可能更为高效。这一发现令我大为惊讶，也使我认识到数学的多样性和交叉性是如此迷人。

5.3 关于极限交换的反复验证

极限交换问题是我反复琢磨的一个难点。起初，我认为只要函数序列满足点态收敛就足够了，但很快发现，实际证明中必须引入额外条件。记得有一次，我试图证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx,$$

其中 $\{f_n\}$ 为一列非负函数，但没有考虑单调性或者有界性问题，结果推导过程中陷入矛盾。后来，在反复查阅教材、参考 MathStackExchange 上的讨论后，我逐步认识到必须借助单调收敛定理或者受控收敛定理来严格证明这一交换。尽管过程繁琐，但每一次成功解决极限交换的问题都让我对测度论的严谨性有了更深刻的体会。

5.4 对“不可积性”概念的深入探讨

黎曼积分与勒贝格积分在处理不可积函数时表现出的巨大差异也引发了我许多疑问。为什么在黎曼积分中，像狄利克雷函数这样“处处不连续”的函数不可积，而在勒贝格积分中

却可以得到合理解释？这让我不禁思考：究竟“不可积”这一概念是如何随着理论的发展而不断演变的？

经过大量查阅文献与同学讨论，我了解到，关键在于“测度”的概念。黎曼积分的不可积性往往源自于不连续点“太多”，而勒贝格积分通过测度过滤掉了那些“微不足道”的点。这里我猜测，未来如果能进一步推广测度论，或许可以对更多看似“病态”的函数建立起一种统一的积分理论。这一思考虽然目前还停留在概念层面，但无疑为我今后的数学探索指明了一条潜在的道路。

5.5 思考中的一些未解之谜

在整个比较过程中，我还遇到了一些目前尚未完全理解的问题：

- 为什么有时黎曼积分可以用简单的数值方法近似，而勒贝格积分却要求更为复杂的测度构造？
- 在某些特殊情形下，是否存在一种“中间型”的积分定义，既保留黎曼积分的直观性，又具有勒贝格积分的完备性？
- 从范畴论的角度出发，能否将积分过程形式化为某种自然变换，使得不同积分定义之间的关系一目了然？

对于这些问题，我突发奇想，也许可以在未来的学习中逐步探讨，但目前我的认识还很有限，只能写下这些疑问以供日后参考。

6 其他相关问题与补充知识

在这部分，我将讨论一些与积分理论密切相关的其他知识和问题，力图构建一个较为全面的知识体系，使得对比黎曼积分和勒贝格积分不仅仅停留在定义和性质上，而是延伸到更多应用和理论联系中。

6.1 积分与级数的关系探讨

我们知道，积分和级数在数学中都是累加思想的体现。事实上，在某些情况下，积分可以看作是级数的连续推广。比如，黎曼和积分的思想就类似于将离散求和推广到连续区间上。然而，级数与积分之间并非完全等价，其差异在于级数求和的收敛性问题和积分求和的可积

性问题。在这一过程中，我猜测二者之间存在某种统一的理论框架，能够解释为什么某些级数对应的函数在积分意义下具有良好性质，而某些则不然。

6.2 Fourier 分析中的积分应用

在傅里叶分析中，积分理论扮演着极其重要的角色。傅里叶变换的定义本质上就是对函数进行积分转换，而在证明傅里叶逆变换时，极限交换问题又一次出现。对于这类问题，勒贝格积分提供了坚实的理论支持，确保了变换过程中的极限交换合法性。记得有一次我在学习傅里叶级数时，发现很多公式都依赖于某种积分交换的正当性证明，这让我更加坚定了深入理解勒贝格积分的必要性。

6.3 概率论中的应用

概率论中的期望、方差等概念均依赖于积分的定义。传统上，若随机变量的分布函数是绝对连续的，其期望可以表示为

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

这里，$f(x)$ 为概率密度函数。而如果随机变量的分布中含有离散部分或者奇异连续部分，黎曼积分显然无法涵盖这种情况，而勒贝格积分则完美解决了这一问题。这也是概率论中广泛采用勒贝格积分作为理论基础的原因之一。同学们，这里我们可以看到，不同的数学分支在面对相同问题时，选择的工具往往各有侧重，而勒贝格积分由于其完备性和灵活性，在现代概率论中具有无可替代的地位。

6.4 函数空间与积分算子

从泛函分析的角度看，积分不仅仅是一个数值，它更是一个从某个函数空间到实数或复数域的线性算子。例如，我们可以将积分看作是 L^p 空间中的一个连续线性泛函。这一观点使得积分理论与希尔伯特空间、巴拿赫空间的理论紧密联系在一起。在这一过程中，我们需要借助黎斯表示定理等工具，讨论如何将一个连续线性泛函表示为积分形式。虽然这些内容超出了高中阶段的知识范围，但对于理解积分本质却提供了更高的视角。

6.5 数值计算中的误差分析

无论是黎曼积分还是勒贝格积分，在实际数值计算中都不可避免地涉及误差问题。对于黎曼积分来说，由于分割的粗细直接影响到结果的精度，因此误差往往与分割网格的最大长度有关。而在勒贝格积分中，由于积分过程涉及到测度的逼近，误差分析则需要考虑测度逼近的不确定性。尽管这些分析在理论上非常复杂，但它们在数值计算中起着至关重要的作用。对此，我曾在 Matlab 中编写程序模拟过简单函数的积分过程，结果显示在某些极端情况下，误差的累积效应远比预期的要大。这一现象促使我进一步思考如何改进数值算法，以更好地适应不同积分定义下的计算需求。

6.6 扩展到复分析与多变量积分

虽然本笔记主要讨论实变函数的积分，但在复分析和多变量积分中，同样存在类似的问题。复分析中的柯西积分公式、留数定理等都涉及积分概念，而多变量积分则需要考虑体积、曲面积分等更为复杂的情况。在这些领域中，测度论同样发挥着重要作用。例如，多变量勒贝格积分为我们提供了一种统一处理多维积分的方法，解决了传统黎曼积分在高维空间中不适用的问题。这里我猜测，未来若能进一步推广这种思想，可能会对解决非欧几里德空间中的积分问题提供全新的视角。

6.7 历史沿革与理论演进的思考

最后，让我们简单回顾一下积分理论的发展历程。黎曼积分作为最早被广泛接受的积分定义，在十九世纪得到了系统的发展；而随着数学分析和集合论的进步，勒贝格积分在二十世纪初被提出，并迅速成为现代分析的基础。虽然从表面上看，两者只是对“面积”的不同定义，但实际上，它们代表了数学家对连续性、极限与集合的理解不断深入的过程。这种演进不仅推动了积分理论本身的发展，同时也催生了概率论、泛函分析、拓扑学等众多新领域。

正因为如此，每次我在比较这两种积分定义时，总觉得自己仿佛在穿越时空，与古今数学家的智慧对话。尽管在理解过程中我曾迷茫、曾怀疑，但正是这些试探与探索构成了我学习数学的宝贵经历。

7 经典例题与讨论

下面给出几个经典的例子，以帮助大家更好地理解黎曼积分与勒贝格积分之间的差异，并进一步激发思考。

7.1 例题一：狄利克雷函数的不可积性

考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

在黎曼积分的定义下，我们可以证明对任意分割 P，都有

$$L(P,f)=0,\quad U(P,f)=1,$$

因此 $\overline{\int_0^1} f\,dx-\underline{\int_0^1} f\,dx=1$，说明 f 不可积。而在勒贝格积分的框架下，由于有 $\mu(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$，故可知

$$\int_0^1 f\,dx=0.$$

这一例子生动地展示了两种积分方法在处理“病态”函数时的不同表现。同学们不妨自己试着证明这一结论，同时思考其背后反映出的理论本质。

7.2 例题二：函数序列极限与积分交换问题

设函数列 $\{f_n\}$ 定义为

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则对任意 n，

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=1.$$

然而，当 $n\to\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 对几乎处处成立，但

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=0.$$

这里，我们正好看到了极限与积分交换失败的例子。利用勒贝格积分的受控收敛定理可以解释这种现象，同时也强调了在应用积分理论时需要格外注意函数序列的性质。我突发奇想，也许可以将这一例子推广到其他更复杂的情形，探讨极限交换条件的必要性与充分性。

7.3 例题三：简单函数逼近的具体构造

设 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上，我们希望通过简单函数序列 $\{\varphi_n\}$ 逼近 f。一种常见的方法是将 $[0,1]$ 均匀分成 n 个小区间，在每个区间上取函数的左端点值构造简单函数：

$$\varphi_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\chi_{\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right)}(x).$$

可以证明，随着 $n \to \infty$，$\varphi_n(x) \uparrow f(x)$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

这一构造过程不仅是勒贝格积分定义的具体实现，同时也让我们看到了如何将理论转化为具体计算。我猜测，对某些较为复杂的函数，也可以采用类似的方法，只是需要更加精细的分割和构造技术。