研究性学习：数列不动点及其拓展

张润程

1 数列不动点的基本概念

各位同学，今天我们聊聊“数列不动点”这个有趣又实用的话题。大家平时可能听老师讲过函数的零点或者方程的解，但**不动点**则是另一种思考问题的角度。简单来说，如果有一个函数 $T : X \to X$（其中 X 可以是实数集，也可以是某个度量空间），那么若存在一个点 $x^* \in X$ 使得 $$T(x^*) = x^*,$$

那么我们就称 x^* 为 T 的不动点。直观地讲，这个点在经过 T 的“作用”之后依然保持原样。

为了更好地理解这一概念，我们不妨举个例子。考虑函数

$$T(x) = \cos x,$$

在实数集 $\mathbb{R}$ 上我们可以证明存在一个不动点 x^* 满足 $\cos x^* = x^*$。事实上，我们可以构造迭代序列

$$x_{n+1} = \cos x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

并利用数值计算发现该序列逐渐收敛到大约 $0.739085\ldots$ 的值。这个数就是所谓的“Dottie 数”。注意到这里的迭代方法正是利用了数列不断“逼近”不动点的思想。大家可能会问：“为什么这个迭代过程会收敛呢?”这就引出了我们接下来要介绍的重要定理——Banach 不动点定理。

在此之前，我要和大家聊聊迭代序列的构造。一般来说，给定初始值 x_0 后，我们令

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

构造一个序列。如果这个序列在某个条件下收敛，我们便可以设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

然后利用函数的连续性（如果 T 连续），可以推导出

$$T(x^*) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

这便证明了 x^* 是 T 的不动点。说实话，这个证明过程看起来简单，但其背后却蕴含着非常深刻的数学原理。

在这里，我意识到同学们可能会对“连续性”的概念还不够了解，或者有的同学还没有接触过**度量空间**的严谨定义。简单来说，度量空间就是一个可以定义“距离”的集合，而连续性则要求函数在任意一点附近都能保持小扰动对应小变化的特性。如果这些概念你还不熟悉，那我们就先把它们略过，等学到分析部分再深入讨论，今天我们主要集中在迭代和不动点上。

总结一下：**不动点**就是在经过函数映射后不改变的点，而通过构造迭代序列，我们就能借助极限思想找到不动点。这也是很多数值算法和理论证明中的关键思想之一。

2 Banach 不动点定理（压缩映射原理）

接下来，我们就来详细介绍一条在数学分析和数值方法中极其重要的不动点定理——**Banach 不动点定理**。这个定理不仅保证了不动点的存在与唯一性，而且还给出了迭代序列的收敛性估计。下面是定理的正式表述：

定理（Banach 不动点定理）：设 (X, d) 为一个完备度量空间，若映射 $T : X \to X$ 满足存在常数 $q \in (0, 1)$ 使得对于任意 $x, y \in X$，都有

$$d(T(x), T(y)) \leq q\, d(x, y),$$

则 T 在 X 上存在唯一的不动点 x^*；并且对于任意初始点 $x_0 \in X$，构造的迭代序列

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

收敛于 x^*，而且收敛速度至少是几何级数，即

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0).$$

证明思路：下面我将按照我自己理解的思路详细证明这个定理，大家有疑问随时可以在心里和我讨论一下。首先，我们证明迭代序列 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列。由收缩条件，我们有

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}).$$

反复应用这个不等式，我们可得

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n\, d(x_1, x_0).$$

接下来，对于任意的 $m > n$，利用三角不等式和上述不等式，我们可以得到

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} q^k \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

由于 $q \in (0, 1)$，右侧趋于 0，这表明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。由于 X 完备，所以序列收敛于某个点 $x^* \in X$。再利用 T 的连续性，就能证明 x^* 是不动点。

最后，我们证明不动点的唯一性。假设存在两个不动点 x^* 和 y^*，则有

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq q\, d(x^*, y^*).$$

由于 $q < 1$，这只能说明 $d(x^*, y^*) = 0$，也即 $x^* = y^*$。

这里的关键在于"收缩"的条件保证了所有点之间距离不断缩小，从而把整个空间"拉"到了一个点上。正是这种思路，使得我们能利用迭代方法求得不动点，并且还能给出精确的误差估计。

例子：回到之前提到的函数 $T(x) = \cos x$。虽然在严格意义上，$\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是全局收缩映射，但在某个合适的区间内，比如 $[0, 1]$，经过适当证明后可以发现其满足局部收缩条件，从而迭代法能够收敛。这正好说明了在实际问题中，我们往往需要对函数的性质作局部分析，而不一定要求全局满足条件。

3 非压缩映射及其它不动点定理

我们刚刚看到 Banach 定理要求映射是一个严格的压缩映射。但现实中，许多函数并不满足这种强条件，所以数学家们想方设法放宽条件，发展出了许多更为一般的不动点定理。

3.1 Krasnoselskii 不动点定理

Krasnoselskii 定理是一类适用于将映射分解为压缩算子和紧算子的情况的结果。具体地说，假设 X 是 Banach 空间，且 $C \subset X$ 是非空闭凸集。如果映射 $T : C \to C$ 可以写成

$$T = A + B,$$

其中 A 是压缩算子（满足 Banach 不动点定理的条件），而 B 是紧算子（即把有界集映射为相对紧集），那么在适当的条件下，T 也存在不动点。由于这里涉及紧性（compactness）这一概念，我突然发现：紧性在我们目前的高中阶段可能还没有接触到，所以这里我只能做简单的介绍。简单来说，一个算子是紧的，意味着它将“无限维”问题转化为“有限维”问题，这在实际求解积分方程时非常有用。

3.2 Meir-Keeler 不动点定理

另一个扩展是 Meir-Keeler 定理，它放宽了固定收缩因子的要求。其基本思想是：对于任意正数 ϵ，存在 $\delta > 0$ 使得只要两个点之间距离在 ϵ 和 $\epsilon + \delta$ 之间，经过映射后距离就会小于 ϵ。这种条件虽然看起来比较“奇怪”，但它可以涵盖更多非线性函数情况。我突发奇想，也许可以通过类似于 Banach 证明的思路，利用序列的 Cauchy 性质来证明这一点，不过具体的证明过程比较繁琐，就不在这里详细展开了。

3.3 Geraghty 不动点定理

Geraghty 定理则在 Meir-Keeler 的基础上作了进一步推广。该定理引入了一个控制函数 φ, 用以描述映射在不同距离下的收缩程度。具体形式较为复杂，但核心思想依然是：如果映射在一定范围内“足够收缩”，那么就存在唯一的不动点。这类定理在处理非线性积分方程中非常有用。

4 Brouwer 与 Schauder 不动点定理

在有限维欧氏空间中, 还有两个非常重要的不动点定理, 分别是 Brouwer 和 Schauder 不动点定理。

4.1 Brouwer 不动点定理

Brouwer 不动点定理断言：在有限维欧氏空间中，任取一个闭凸且紧的子集（例如闭球），任何连续映射 $T : C \to C$ 必然存在不动点。直观地说，这就像把一块橡皮擦随意扭曲后，总会有至少一点保持不变。这个定理的证明利用了代数拓扑中的同伦理

论和归纳法，其思想非常深邃。虽然我们高中生还未接触同伦论，但我觉得这种直观的“橡皮擦不动点”比喻非常有趣。

4.2 Schauder 不动点定理

Schauder 定理则是 Brouwer 定理在无限维 Banach 空间中的推广。它要求映射不仅连续，而且将闭凸紧集映射到自身，从而保证存在不动点。由于无限维空间中的紧性概念较为复杂，这里我们暂时只记住：如果你能找到一个合适的紧子集，并证明映射连续，那么就能用 Schauder 定理证明存在不动点。事实上，这一定理在偏微分方程和积分方程的解存在性证明中应用广泛。

在讨论 Brouwer 和 Schauder 定理时，我曾在 MathOverflow 上看到一个讨论帖，其中有位大牛提问：“如何用直观的方法理解 Schauder 定理?”回答者用类似“把无限维空间想象成一个巨大的橡皮球”的比喻进行了解释，虽然这种比喻并非完全严格，但确实帮助我理解了这一定理的内涵。总之，对于我们这种初学者来说，直观理解比严谨证明更为重要。

5 Tarski 不动点定理

除了度量和拓扑空间中的不动点定理，在具有部分序结构的集合中也有不动点理论的重要成果。Tarski 不动点定理便是其中的代表。定理的大意是：如果 L 是一个完备格 (complete lattice)，且映射 $T : L \to L$ 是单调（即若 $x \le y$ 则 $T(x) \le T(y)$），那么 T 必有不动点，而且存在最大和最小的不动点。

这一理论在经济学（例如博弈论和均衡分析）和理论计算机科学中有重要应用。说到这里，我突然想到我们以前在讨论集合与序关系时提到的“格”，虽然那时可能没有详细讨论完备格，但这里就不妨简单提一下：完备格是指任意子集都有上界和下界的格。详细证明过程涉及 Zorn 引理和序理论，超出了我们目前的知识范围，不过直观上，这个定理告诉我们，在有序系统中，只要映射是“温和”的（单调的），系统总能找到一个平衡点。

6 数值方法中的不动点迭代法

除了理论证明，不动点的思想在数值计算中也大有作为。事实上，许多求解非线性方程、微分方程的方法都可以归结为寻找不动点。下面我举几个具体例子。

6.1 Picard 迭代法

Picard 迭代法是求解常微分方程初值问题的一种方法。考虑常微分方程

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

我们可以将其写成积分形式

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

定义映射

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds,$$

这样一来，求解微分方程就转化为寻找函数 y 满足 $T(y) = y$。在适当的条件下（例如 f 满足 Lipschitz 条件），利用 Banach 不动点定理便能证明不动点存在且唯一，而迭代序列

$$y_{n+1} = T(y_n)$$

则收敛于解函数。这里的思想与我们之前讨论的完全一致：通过不断迭代，逼近不动点。

6.2 Newton-Raphson 方法

Newton-Raphson 方法是另一种常用的求根方法，其核心思想是构造一个迭代公式使得不动点即为原方程的根。考虑方程

$$f(x) = 0,$$

令

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

则若 x^* 是不动点，则必有

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)},$$

从而 $f(x^*) = 0$。在实际计算中，我们选取初始值 x_0，构造迭代序列

$$x_{n+1} = T(x_n),$$

在一定条件下（例如 f 具有连续二阶导数且初值足够接近真正的根）可以证明序列收敛。Newton-Raphson 方法的收敛速度通常是二次的，这在数值计算中是非常高效的。这里需要提醒大家，由于该方法需要计算导数，因此在实际应用中要注意数值稳定性和初值选择问题。

值得一提的是，我在用 Matlab 编写数值求解程序时，常常利用这些迭代方法来解决一些非线性方程问题。在调试代码的过程中，我逐渐体会到理论与实践之间的微妙联系：理论上的不动点定理为数值算法提供了坚实的基础，而实际问题中的各种误差控制和收敛性验证，又不断激发我对数学更深的兴趣。

7 动力系统中的不动点与稳定性分析

不动点理论在动力系统的研究中同样扮演着重要角色。在这里，不动点往往对应着系统的平衡态，而通过对不动点的局部分析，我们可以判断系统的稳定性。设有离散动力系统

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

若存在不动点 x^* 满足 $f(x^*) = x^*$，那么我们就可以对 f 在 x^* 处做线性化分析，即考察雅可比矩阵 $Df(x^*)$ 的谱半径。若谱半径小于 1，则称 x^* 是局部渐近稳定的；若大于 1，则是不稳定的；若等于 1，则情况较为复杂，需要进一步讨论。

举个简单例子，考虑一维动力系统

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

这就是著名的 Logistic 映射。当参数 r 在不同区间取值时，不动点的稳定性发生变化。通过计算导数

$$f'(x) = r(1 - 2x),$$

并在不动点处代入，我们可以判断该不动点的稳定性。这里的分析过程与 Banach 定理中的思想有异曲同工之妙：都是在寻找一个“吸引子”，使得经过迭代后系统状态最终稳定下来。

我在做这部分研究时，曾突发奇想：是否能将这种稳定性分析推广到更高维的非线性系统中呢？实际上，这正是李雅普诺夫稳定性理论的切入点。虽然李雅普诺夫方法的证明和构造 Lyapunov 函数的过程较为复杂，但它们依然与我们今天讨论的不动点和迭代方法密切相关。

8 计算机科学中的不动点思想

不动点的概念不仅在数学分析和数值方法中广泛应用，在计算机科学中也占有一席之地。尤其是在函数式编程和递归定义中，不动点起到了“自我引用”的作用。

8.1 演算与 Y 组合子

在 演算中，为了定义递归函数，常常需要构造所谓的 **Y 组合子**。简单来说，Y 组合子满足

$$Y(f) = f(Y(f)),$$

即 $Y(f)$ 是函数 f 的不动点。虽然这一表达看上去抽象，但它为递归计算提供了理论基础。记得我第一次看到这个概念时，觉得“这不是在自我催眠吗？”但经过反复推敲后，我逐渐领会到这正是函数自引用的精妙之处。

8.2 递归函数理论中的不动点定理

此外，递归函数理论中还有 **Kleene 不动点定理**等重要结果。该定理表明，对于某些递归算子，总可以找到一个不动点，从而使得递归定义有意义。虽然这部分内容比较超前，但我猜有一天我们会在高级计算理论课程中系统学习这一块内容。现在我们先记住：不动点思想贯穿于很多数学和计算机科学的问题中，是理解自我引用和递归本质的重要工具。

9 拓扑学中的不动点理论及不动点指数

在代数拓扑中，不动点理论更是占据了一个特殊的位置。最著名的莫过于 **Lefschetz 不动点定理**，该定理为连续映射的不动点存在性提供了强有力的工具。定理的大致表述如下：

设 X 为紧多样体，$f : X \to X$ 为连续映射，定义 Lefschetz 数为

$$L(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{tr}(f_*|_{H_k(X)}),$$

其中 $H_k(X)$ 为 X 的第 k 个同调群。如果 $L(f) \neq 0$，则 f 至少有一个不动点。

这种定理不仅告诉我们不动点必然存在，而且通过计算不动点指数，可以对不动点的“贡献”进行定量描述。具体来说，每个不动点都有一个**指数**，反映了映射在该点处的局部行为。虽然我在平时学习时主要接触的是 Banach、Brouwer 这类“不动点存在性”的定理，但在阅读一些高级教材（例如 Hatcher 的代数拓扑教材）时，我突然发现这里的思想竟与微分拓扑中的“重数”概念有着某种神秘的联系。我猜测这正是数学中从局部到全局思想的一种体现。

我曾看到过一篇关于“不动点指数”的讨论文章，作者用非常形式化的语言论证了不动点指数在形变、不变量理论中的重要性。虽然这些内容超出了我们的基础范围，但对我来说，能够窥见数学内部结构的严谨美，实在令人兴奋。

10 其他相关话题及思考

在前面的各部分中，我们已经讨论了从数列迭代到不动点理论的多个方面。现在，我想把这些看似零散的知识串联起来，尝试从一个更高的视角去思考这些问题。

首先，我们注意到不动点理论贯穿了数学的许多分支：分析中的收缩映射定理、拓扑学中的 Brouwer 与 Schauder 定理、序理论中的 Tarski 定理、动力系统中的平衡点分析以及计算机科学中的递归函数……这些看似毫不相干的内容，其实都在以不同的方式表达同一个思想——“在一个系统中，总存在一个平衡点或稳定状态”。这正是数学统一性美的一个体现！

其次，在具体应用中，我们常常利用迭代序列来“逼近”不动点。从 Banach 不动点定理的证明中我们看到，只要满足一定的压缩条件，迭代序列就必然收敛，并且收敛速度可以被量化。这一思想启发了我们在数值计算中大量使用迭代法，比如求非线性方程的根、解微分方程、甚至求解最优化问题。事实上，在我利用 Matlab 进行数值实验时，常常遇到因为初始猜测不够好而导致迭代发散的情况，这时我就会重新审视函数是否满足压缩条件，或者尝试用变步长方法来改善收敛性。

此外，我注意到在许多高等数学书籍和论文中，数学家们往往喜欢从范畴论的角度讨论不动点问题。比如说，通过考虑从一个对象到自身的自同态，在适当的范畴中讨论不动点，就可以引入自然变换等高级工具。虽然这些内容离我们的高中知识有一定距离，但我猜测这种观点可能会在未来的学习中对我有很大帮助。

在这里，我也不禁反思：是否存在一种更加普适的数学理论，能够统一解释为何“迭代”和“不动点”在如此多的领域中都能发挥作用？我猜测这背后隐藏着数学内部某种深层次的自相似性和对称性，也许正是这种美妙的内在联系，激励着无数数学家不断探索未知领域。