线性代数复习

定理1.2.9. 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)元素的代数余子式对应乘积之和为零. 即，若设 $A=|a_{ij}|_{n\times n}$ 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}A, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}A, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\right)$$

证明：只需把A的第j行替换成第i行，新矩阵记为B，即得 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=|B|$，B的第i,j行相同，$|B|=0$

例1.2.6 证明n阶范德蒙德(Vandermonde)行列式($n\geq 2$)

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \boxed{x_1 & x_2 & \cdots & x_n}\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i).$$

结论可作为公式使用

例 1.2.6 范德蒙德行列式

证明思路：

- 从最后一行开始，依次将前一行乘以 $-x_1$ 加到后一行，逐步消去第一列除第一行外的元素，使第一列变为 $(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$。
- 按第一列展开，提取每行的公因子 (x_j-x_1)，得到降阶的范德蒙德行列式。
- 递推得到最终公式：

$$D_n=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)\text{。}$$

例1.2.7 证明$n+m$阶行列式 (块三角行列式)

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

结论可作为公式使用

式 (1.15) 常简记为: $D_n=\begin{vmatrix}A & O\\ * & B\end{vmatrix}=|A||B|$,类似可得$D_n=\begin{vmatrix}A & *\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$.

另外要注意：$D_n=\begin{vmatrix}O & A\\ B & *\end{vmatrix}\neq|A||B|$, $\begin{vmatrix}O & A\\ B & *\end{vmatrix}=(-1)^{nm}\begin{vmatrix}A & O\\ * & B\end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$.

书上使用的是归纳法。结论很明显。

另一个简单的思路是用拉普拉斯展开。

例 1.2.7 块三角行列式

证明思路：

- 对分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ * & B \end{bmatrix}$，利用拉普拉斯展开（按前 n 列展开），由于左下块对前 n 列的子式贡献为零，可得

$$D_n = |A| \cdot |B|。$$

- 类似地，$\begin{bmatrix} A & * \\ O & B \end{bmatrix} = |A||B|$。
- 但当零块在右上角时，需要交换若干行（或列）化为块三角形式，会产生符号 $(-1)^{nm}$。

更一般的拉普拉斯展开定理

设 A 是 n 阶方阵，任取 k 行（行号 $i_1, i_2, \ldots, i_k$），则：

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} (-1)^{(i_1+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j_k)} \cdot M \cdot N$$

其中：

(k=1 时即为标准的计算行列式方法)

- M 是由这 k 行和 k 列 $j_1, \ldots, j_k$ 交叉处的元素构成的 k 阶子式；
- N 是该子式对应的代数余子式（即去掉这 k 行和这 k 列后剩下的 $n-k$ 阶子式）。

行列式计算技巧

拆分行(列)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & & \\ 0 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & & \\ 1 & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & a \end{vmatrix} + aD_{n-1} = a^n + aD_{n-1}$$

$$= a^n + a^n + a^2 D_{n-2} = \cdots = (n-1)a^n + a^{n-1}D_1 = (n+1)a^n$$

加边法

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a+x_1^2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+x_1^n & a+x_2^n & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a & a+x_1^2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+x_1^n & a+x_2^n & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}_{n+1} + (1+a)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= -a\prod_{k=1}^{n}(x_k - 1)\prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) + (1+a)\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i) = (-a\prod_{k=1}^{n}(x_k-1) + (1+a)\prod_{k=1}^{n} x_k)\prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i).$$

行列式扩张

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} \end{vmatrix}$$

扩张成范德蒙行列式展开

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & y^{n} \end{vmatrix} =\Big(\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\Big)\Big(\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\Big)$$

按最后一列展开成y的多项式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & y^{n} \end{vmatrix} = A_{1,n+1}+yA_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}A_{n,n+1}+y^nA_{n+1,n+1}=\cdots+y^{n-1}(-D)+\cdots$$

比较 y^{n-1} 项的系数： $(-\sum x_k)\prod(x_j-x_i)=-D$

故 $D=(\sum x_k)\prod(x_j-x_i)$

行列交互

$$D_{n+1}(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n & x & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & x & n \\ & & & 1 & x \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n+x & x+1 & 2 & & \\ & n-1 & x & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & & & \\ n-1 & x+1 & 2 & & \\ 1-n & n-1 & x & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & & & \\ n-1 & x+1 & 2 & & \\ 0 & x+n & x+2 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x \end{vmatrix} \overset{c_2-c_3}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & & & \\ n-1 & x-1 & 2 & & \\ 0 & n-2 & x+2 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & & & \\ n-1 & x-1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x-1 & n \\ & & & 0 & x+n \end{vmatrix}=(x+n)D_n(x-1)=\cdots=\prod_{k=-n,-n+2,\cdots,n}(x+k)$$

(按最后一行展开)

适用于三对角矩阵或者其他性质良好的矩阵（如主对角相同，副对角元素对称/相同），遇到这种要有意构造递推。对于双对角矩阵一般可以直接递推，不过值得一提的事就是 Jordan 型，虽然我们书上没有，但很有用。后面到相似矩阵那块再提

行(列)比例递减

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12245 \\ 67813 & 67913 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 12245 \\ -100 & 67913 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 12245 \\ 0 & 80158 \end{vmatrix} = 8015800$$

行(列)比例递加

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & (n-1)+nx & \sum_{i=0}^{2}(n-i)x^{2-i} & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(自左向右加左列的x倍)

$$= (-1)^{1+n}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

行(列)比例全加

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & \sum_{k=n}^{1} kx^{k-1} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}\sum_{k=n}^{1} kx^{k-1} \begin{vmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

(自左向右依次将列的x^{n-1}, x^{n-2},…,x倍加到最右列)

***该题还可：r_1展开得结果；c_1展开得到递推式**

(也就是全加/全减执行多次)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \overset{\text{列全加}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \overset{\text{行递减}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1-n \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} D_n$$

配套相加

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n=2k}$$

(下面一半：第$2k+1-i$行加到第i行，

右面一半：第$2k+1-i$列减去第i列)

化三角形消零

$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
-1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
-1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\
-1 & -2 & -3 & \cdots & n-1 & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\
0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n
\end{vmatrix}
= n!
$$

(第1行加到各行)

化三角形消零

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
$$

(若所有$a_i \neq 0$，各列的$-1/a_i$倍加到第1列)
(若有 $a_i = 0$，可按第i+1列再原第i+1行展开)

$$
\overset{\substack{a_i \neq 0 \\ i=1,\cdots,n}}{=}
\begin{vmatrix}
a_0 - \frac{1}{a_1} - \cdots - \frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
= \left(a_0 - \frac{1}{a_1} - \cdots - \frac{1}{a_n}\right) a_1 a_2 \cdots a_n
$$

$$
\overset{a_i = 0}{=}
\begin{vmatrix}
a_0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & & & & & \\
1 & & a_{i-1} & & & & 0 \\
1 & & & 0_i & & & 0 \\
1 & & & & a_{i+1} & & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
= (-1)^{i+2}
\begin{vmatrix}
1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & a_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & a_{i-1} & & \\
& & & a_{i+1} & \\
& & & & \ddots \\
& & & & & a_n
\end{vmatrix}
= - \prod_{\substack{j=1,\cdots,n \\ j \neq i}} a_j
$$

递推式

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & & \\
1 & 1 & \ddots & \\
& \ddots & \ddots & 1 \\
& & 1 & 1
\end{vmatrix}_n
\quad
D_n = D_{n-1} - D_{n-2} = -D_{n-3} = \ldots =
\begin{cases}
(-1)^k D_1 = (-1)^k, & n = 3k+1 \\
(-1)^k D_2 = 0, & n = 3k+2 \\
(-1)^{k-1} D_3 = (-1)^k, & n = 3k
\end{cases}
$$

$$
\begin{vmatrix}
 & & a^2 & 2a \\
 & a^2 & 2a & 1 \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
2a & 1 & &
\end{vmatrix}_n
\overset{\substack{\text{从右往左} \\ \text{两两交换列}}}{=}
(-1)^{n-1}
\begin{vmatrix}
2a & & & a^2 \\
1 & & a^2 & 2a \\
 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\
0 & 2a & 1 &
\end{vmatrix}
= \cdots = (-1)^{(n-1)+\cdots+1}
\begin{vmatrix}
2a & a^2 & & \\
1 & 2a & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & a^2 \\
 & & 1 & 2a
\end{vmatrix}
= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} (n+1) a^n
$$

交换至对称·为止的次数

直接记

(交换成正对角线)

二元/三元线性方程组的克莱姆法则：

考虑方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (1.1)$$

定理1.1.1 对方程组 (1.1)，若未知量系数a_{ij}不全为零，有如下结论：

(1) 若$\Delta \neq 0$，则方程组 (1.1) 有唯一的解：$x_1=\Delta_1/\Delta,\ x_2=\Delta_2/\Delta$.

(2) 若$\Delta=0$，但 Δ_1, Δ_2不全为零，则方程组 (1.1) 无解 .

(3) 若$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$，则方程组 (1.1) 有无穷多组解 .

其中：
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

定理1.1.2 对方程组 (1.9)，有

(1) 若$\Delta \neq 0$，则方程组 (1.9) 有唯一的解：$x_1=\Delta_1/\Delta,\ x_2=\Delta_2/\Delta,\ x_3=\Delta_3/\Delta$.

(2) 若$\Delta=0$，但 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为0，则方程组 (1.9) 无解 .

(3) 若$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$，则方程组 (1.9) 可能无解也可能有无穷多组解 .

其中：
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

对于二维和三维情况的几何/向量解释本来想提一句的，现在觉得用处不大。

克莱姆(Cramer)法则

方程组系数，默认系数不全为0

定理1.2.10. 对于n元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

方程组右端常量

若系数行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则原方程组有解，且解是唯一的，这个解可用公式表示为：
$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中D_j $(j=1,2,\ldots,n)$为：
$$D_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{第}j\text{列} & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \neq 0.$$

- **高斯消元法（及行初等变换）** 是解线性方程组的 **“通用主力工具”**。它计算效率高，适用于任意规模的方程组，并能清晰地判断解的情况（唯一解、无解、无穷多解）。
- **克莱姆法则** 是解线性方程组的 **“理论分析工具”** 和 **“小规模特解工具”**。它在理论上非常优美，但在实际计算中效率极低，通常只用于小型方程组（如2x2, 3x3）或理论推导。

深入对比分析

1. 高斯消元法（配合秩的判断）

- **是什么**：通过行初等变换将增广矩阵化为行最简形或阶梯形。
- **优势**：
  1. **普适性强**：对任何规模的方程组（未知数个数和方程个数相等或不相等）都有效。
  2. **效率高**：计算复杂度约为 $O(n^3)$，对于大规模方程组，这是最实用的数值方法。
  3. **信息全面**：不仅能求出解，还能直接判断解的情况：
     - 若系数矩阵的秩 `r(A)` < 增广矩阵的秩 `r(A|b)` -> **无解**
     - 若 `r(A) = r(A|b) = n` (未知数个数) -> **有唯一解**
     - 若 `r(A) = r(A|b) < n` -> **有无穷多解**，并且自由变量的个数就是 `n - r(A)`。
- **劣势**：
  - 在理论分析中，解的表达式不直观。比如，当系数矩阵 `A` 变化时，解 `x` 如何变化，从消元过程中不易直接看出。

2. 克莱姆法则

- **是什么**：专门用于解决 **“n个方程n个未知数”** 且 **系数行列式不为零** 的线性方程组。
  - 对于方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，如果 $\det(A)\neq 0$，那么方程组有唯一解。
  - 其解为：$x_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$。
  - 其中，A_i 是将 A 的第 i 列替换成常数列 $\vec{b}$ 后得到的矩阵。
- **优势**：
  1. **理论优美，形式简洁**：它给出了解的显式公式，将解向量的每个分量都清晰地表示为两个行列式的商。这在数学推导和证明中极具价值。
  2. **具有重要的理论意义**：
     - **解对参数的依赖性**：当方程组的系数或常数项包含一个参数时，克莱姆法则能清晰地显示出解是如何随这个参数变化的。因为行列式是矩阵元素的多元多项式，可以直接分析。
     - **为其他理论提供基础**：它是证明很多重要定理的工具，例如在证明“方阵 A 可逆的充要条件是 $\det(A)\neq 0$”时，克莱姆法则提供了构造性证明。
     - **小规模计算方便**：对于2x2或3x3的方程组，用手算代入克莱姆法则求解非常直接和方便。
- **劣势**：
  1. **计算效率极低**：计算一个 $n\times n$ 行列式的计算量大约是 $O(n!)$（按定义展开）或 $O(n^3)$（化为上三角阵），而用克莱姆法则需要计算 $n+1$ 个行列式！这远比高斯消元法（一个过程搞定所有未知数）的计算量大得多。
  2. **适用范围狭窄**：
     - 只适用于 **方程个数等于未知数个数** 的情况。
     - 只适用于 **系数行列式不为零** 的情况。如果 $\det(A)=0$，它直接宣告“无唯一解”，但无法区分是无解还是有无穷多解，还需要借助秩来判断。

3(6) 很多同学直接展开，也可如下解答：

解：
$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & c & 0 & d\\ x & 0 & y & 0\\ 0 & u & 0 & v\end{vmatrix} \overset{c_2\leftrightarrow c_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & d\\ x & y & 0 & 0\\ 0 & 0 & u & v\end{vmatrix} \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0\\ x & y & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & d\\ 0 & 0 & u & v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b\\ x & y\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} c & d\\ u & v\end{vmatrix} = (ay-bx)(cv-du).$$

4(3) 有些同学利用行列式相减性质简化，可处理称范德蒙行列式再计算，见如下：

解：
$$\begin{vmatrix} 1 & ax & a^2+x^2\\ 1 & ay & a^2+y^2\\ 1 & az & a^2+z^2\end{vmatrix} \overset{c_3-a^2c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & ax & x^2\\ 1 & ay & y^2\\ 1 & az & z^2\end{vmatrix} \overset{\substack{c_2\div a\\ \text{转置}}}{=} a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix} \overset{\text{范德蒙}}{=} a(y-x)(z-x)(z-y)=a(x-y)(y-z)(z-x).$$

4(4)有多种解答，见如下：

解法一：

(列比例全加)
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1\end{vmatrix} \overset{c_1+\sum_{i=2}^{n}\lambda^{i-1}c_i}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ \sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1\end{vmatrix} \overset{c_1\text{展开}}{=} (-1)^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i}\right)\begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1\end{vmatrix}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i},\text{其中}a_0=1.$$

解法二：

(列比例递加)
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1\end{vmatrix} \overset{c_{i-1}+\lambda c_i,\,i=n,n-1,\cdots,2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ f_n(\lambda) & f_{n-1}(\lambda) & f_{n-2}(\lambda) & \cdots & f_2(\lambda) & \lambda+a_1\end{vmatrix} = D_n,\text{其中}f_k(\lambda)=\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_k.$$

$$D_n \overset{c_1\text{展开}}{=} (-1)^{n+1}f_n(\lambda)\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1\end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1}f_n(\lambda)(-1)^{n-1}=f_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n.$$

解法三：

(第 1 列展开) $D_n=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix} \overset{c_1\text{展开}}{=} \lambda D_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = \lambda D_{n-1}+a_n.$

故有 $D_n=\lambda D_{n-1}+a_n=\lambda(\lambda D_{n-2}+a_{n-1})+a_n=\lambda^2 D_{n-2}+a_{n-1}\lambda+a_n=\cdots=\lambda^{n-1}(\lambda+a_1)+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n.$

解法四：

(第 n 行展开) $D_n=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix} \overset{r_n\text{展开}}{=} (-1)^{n+1}a_n M_{n1}+(-1)^{n+2}a_{n-1}M_{n2}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{n-j+1}M_{nj}+\cdots+(-1)^{n+n}(\lambda+a_1)M_{nn}$

其中 $M_{nj}=\left|\begin{array}{cccc|cccc} \lambda & -1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \lambda & -1 & & & & \\ & & & \lambda & & & & \\ \hline & & & & -1 & & & \\ & & & & \lambda & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \lambda & -1 \end{array}\right|_{(j-1)+(n-j)} = \lambda^{j-1}(-1)^{n-j}, (-1)^{n+j}a_{n-j+1}M_{nj}=a_{n-j+1}\lambda^{j-1}, j=1,2,\cdots,n.$

故 $D_n=a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_{n-j+1}\lambda^{j-1}+\cdots+(\lambda+a_1)\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$

解法五：数学归纳法，利用解法三的第一步 $D_n=\lambda D_{n-1}+a_n$.

5(2) 很多同学利用所有列加到第一列提取第一个因式，后面计算复杂，可利用分块特点计算如下：

解：$\left|\begin{array}{cc|cc} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ \hline b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{array}\right| \overset{\substack{r_1+r_3 \\ r_2+r_4}}{=} \left|\begin{array}{cc|cc} x+b & a+c & x+b & a+c \\ a+c & x+b & a+c & x+b \\ \hline b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{array}\right| \overset{\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_2}}{=} \left|\begin{array}{cc|cc} x+b & a+c & 0 & 0 \\ a+c & x+b & 0 & 0 \\ \hline b & c & x-b & a-c \\ c & b & a-c & x-b \end{array}\right|$

$=\begin{vmatrix} x+b & a+c \\ a+c & x+b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-b & a-c \\ a-c & x-b \end{vmatrix}=((x+b)^2-(a+c)^2)((x-b)^2-(a-c)^2)=0,$

故解为 $x+b=\pm(a+c), x-b=\pm(a-c)$ 即 $x=-b+a+c, x=-b-a-c, x=b+a-c, x=b-a+c$.

6(3) 计算不够简单，可如下：

解：$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1-c_2 \\ c_3-c_4}}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1\div x \\ c_3\div y}}{=} xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2-c_1 \\ c_4-c_1-c_3}}{=} xy\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -y \end{vmatrix}=x^2y^2.$

7(1)有些同学将该题做复杂了，可如下：

解：$D_n=\begin{vmatrix} x & y & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & y \\ y & & & x \end{vmatrix} \overset{c_1\text{展开}}{=} x\begin{vmatrix} x & y & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & y \\ & & & x \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{vmatrix}_{n-1} = x^{n-1}+(-1)^{n+1}y^{n-1}.$

7(3)有多种解法，见如下：

解：$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{\substack{r_i-r_1 \\ i=2,\cdots,n}}{=} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$

解法二：$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2+\cdots+c_n \\ c_1\div(x+(n-1)a)}}{=} (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{\substack{c_i-ac_1 \\ i=2,\cdots,n}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$

1. 置换矩阵

- **定义**：每行和每列有且仅有一个元素为1，其余元素均为0。
- **重要性质**：
  - **正交性**：置换矩阵是正交矩阵，即 $P^T = P^{-1}$。
  - **幂次不一定为E**：您提到的 $P^2 = E$（即对合）并不总是成立。这仅在置换是**对换**（即两个元素互换，其余不变）或**不相交对换的复合**时才成立。例如，循环置换 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有 $P^3 = E$，但 $P^2 \neq E$。
  - **作用**：左乘一个矩阵是对其行进行置换，右乘是对其列进行置换。它是线性代数中矩阵分解和理论证明的重要工具。

3. 对称矩阵

- **定义**：矩阵等于其转置，即 $A = A^T$。
- **重要性质**：
  - **谱定理**：任何实对称矩阵都可以被正交对角化。即存在正交矩阵 Q 和对角矩阵 D，使得 $A = QDQ^T$。这意味着它的所有特征值都是实数，并且特征向量构成一组正交基。
  - **应用**：是物理学和工程学中最常见的矩阵之一，例如惯性张量、应力张量、图的邻接矩阵（无向图）、协方差矩阵等。

4. 反对称矩阵

- **定义**：矩阵等于其转置的相反数，即 $A = -A^T$。
- **重要性质**：
  - **主对角线为零**：因为 $a_{ii} = -a_{ii}$，所以主对角线元素必须为0。
  - **特征值**：特征值是零或纯虚数。
  - **应用**：在三维空间中，叉积运算 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 可以表示为一个反对称矩阵 $[\mathbf{a}]_\times$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的乘法。它也用于描述无穷小旋转。

5. 正交矩阵

- **定义**：矩阵的转置等于其逆矩阵，即 $A^T = A^{-1}$。
- **重要性质**：
  - **保范性**：最重要的性质是保持向量长度和夹角不变。即 $\|Ax\| = \|x\|$，且 $(Ax)^T(Ay) = x^T y$。
  - **行列式**：其行列式的值为 ± 1。行列式为 $+1$ 的对应**旋转变换**；行列式为 -1 的对应**反射变换**。

定义2.1.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

称为方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式，记为 $|A|$. 如果 $|A|\neq 0$，则称矩阵A是非异矩阵，如果 $|A|=0$，则称矩阵A是奇异矩阵或退化矩阵.

例2.2.7 证明 $|AB|=|A|\ |B|$.

结论可作为公式使用

补充例2B X幂等是指$X^2=X$，若A、B幂等，则$A+B$幂等当且仅当$AB=BA=O$.

证明 因为$A^2=A$、$B^2=B$， 故$(A+B)^2=A+B$化简可得$AB+BA=O$. 故只要证明$AB+BA=O$充要条件为$AB=BA=O$.

充分性显然. 现证必要性. 对$AB+BA=O$两边分别左乘和右乘A，利用A、B幂等性质得到 $AB+ABA=O$, $ABA+BA=O$，从而可得$AB=-ABA=BA$，进一步有$AB+BA=2AB=O$，故$BA=AB=O$.

对于一元矩阵多项式，有如下交换律：（专指方阵）

$A^kA^l=A^{k+l}=A^lA^k$， $k,l=0,1,2,3,\cdots$,其中$A^0=E$,即$A^kE=EA^k,k=1,2,3,\cdots$,

$f(A)g(A)=g(A)f(A)$, 因为组成项比较得：$a_iA^ib_jA^j=b_jA^ja_iA^i$

其中$f(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E, g(A)=b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0E.$

一元矩阵多项式可以象普通数的代数式那样交换和展开:

若有： $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$,

则有： $f(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E=a_n(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_nE)$.

* 利用矩阵多项式计算的可交换性：

矩阵幂乘的计算

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^n$$

$$=(E+A)^n=E+C_n^1A+C_n^2A^2+C_n^3O+\cdots=E+nA+\frac{n(n-1)}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

*利用矩阵乘法不可交换性：

$$A=\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-3&1\\6&-6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)，\quad A^2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(3,-3,1)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\left((3,-3,1)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)(3,-3,1)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}2(3,-3,1))=2A$$

定义2.6.2 (方阵的伴随矩阵) 设$A=(a_{ij})$ 为n阶方阵，A_{ij}是 $|A|$ 中元素a_{ij}的代数余子式，则称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的**伴随矩阵**.

关于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 的证明可使用开头的定理1.2.9.

克莱姆法则

* 当$Ax=b$满足$|A|\neq 0$，则方程组**有唯一解** $x=A^{-1}x$.
进一步有：$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$，故有

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+\cdots+b_nA_{n1} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1/|A| \\ \vdots \\ D_n/|A| \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}, A_{ii}\,(i=1,2,\cdots,s)\text{可逆，则}A\text{可逆且 } A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

定义2.4.4 (梯形矩阵，矩阵的标准形) 若矩阵A满足下面两个条件：
(1) 若有零行，则零行全部在下方，
(2) 从第一行起，每行第一个非零元素前面的零的个数逐行增加，则称A为**行梯形矩阵**(row echelon matrix). 若A还满足：
(3) 非零行的首元素为1，且“1”所在列其余元素全为零，称A为**行简化梯形矩阵**(reduced row echelon matrix). 类似可定义列梯形矩阵与列简化梯形矩阵 .
若矩阵A既是行简化梯形矩阵，又是列简化梯形矩阵，则称A是**标准形矩阵**，矩阵的标准形可写为 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$

行梯形：$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，行简化梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，列梯形：$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2.1 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，列简化梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 17 & 7.5 & 0 \end{pmatrix}$，标准型：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

定理2.5.2 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

说明：若行梯形矩阵A的非零行有k行，则经过一系列的初等列变换后得到标准形矩阵 $\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$，有$k$个1，故 $\mathrm{r}(A)=k$.

注：列梯形矩阵的秩为非零列的个数.

推论2.5.3 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行(列)变换变为单位矩阵.
任意可逆矩阵经过多次初等行变换得到的行简化梯形是单位矩阵.

推论 2.5.3 就意义着满秩同形矩阵一定等价

关于定理 2.5.2，可以联系一下秩—零化度定理。

对于线性映射 $T: V \to W$，其中 V 是有限维向量空间，有

$$\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) = \dim V$$

其中 $\dim(\operatorname{im} T)$ 称为 T 的秩（rank），$\dim(\ker T)$ 称为 T 的零化度（nullity）

当 T 由矩阵 $A_{m \times n}$ 表示时，$V = \mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{F}^n$），$W = \mathbb{R}^m$，则：

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = n$$

其中 $\operatorname{nullity}(A) = \dim\{x \mid Ax = 0\}$。

1. 秩的不同等价定义

秩 $r = \dim(\operatorname{im} T)$ 可以理解为以下各种概念的数值：

1. **列空间的维数**
   $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Col}(A)$，即 A 的列向量组的极大线性无关组的向量个数。
2. **行空间的维数**（与列空间维数相等）
   $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Row}(A)$，即 A 的行向量组的极大线性无关组的向量个数。
3. **行阶梯形（REF）的非零行个数**
   因为行初等变换不改变行空间，非零行构成行空间的一组基。
4. **主元列个数**（在行最简形 RREF 中看得清楚）
   每个主元列对应一个主元变量，主元个数 = 秩。
5. **值域空间的维数**
   对于线性映射 T，就是 $\dim T(V)$。
6. **非零奇异值的个数**（在 SVD 中）
   若 $A = U\Sigma V^T$，Σ 中正对角元的个数 = $\operatorname{rank}(A)$。
7. **满秩子方阵的最大阶数**
   即 A 的非零子式的最大阶数（行列式不为零的子方阵的大小）。
8. **像空间的维数**（几何上）
   即映射后像的“自由度”。

2. 零化度的不同等价定义

零化度 $n - r = \dim(\ker T)$ 可以理解为：

1. **零空间的维数**
   $\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ 的维数。
2. **自由变量的个数**（在解 $Ax = 0$ 时）
   在 RREF 中，自由变量的个数 = $n -$ (主元列个数) = $n - r$。
3. **线性约束中“冗余”自由度的个数**
   从 V 的 $\dim V = n$ 中减去像的维数 r，剩下的就是被“压缩”到零的维数。
4. **解空间的维数**
   齐次方程 $Ax = 0$ 的解空间的维数。
5. **左零空间对应？** 不对应，左零空间维数是 $m - r$，不是 $n - r$。
6. **与零空间基向量的个数**
   零空间的任意基包含 $n - r$ 个向量。

1. 向量空间 $\{0\}$ 的维数

- 向量空间 $\{0\}$ 中只有一个元素，即零向量。
- 根据向量空间的定义，任何向量空间都必须包含零向量，但若只有零向量，就是零维空间。
- 维数的定义：空间中一个基的向量个数。
- 基的定义：线性无关且能生成整个空间的向量组。

在 $\{0\}$ 中：

- 任何非空向量集合都包含 0，而 $\{0\}$ 是线性相关的（因为 $1 \cdot 0 = 0$ 有非平凡系数 1 使等式成立）。
- 因此，**空集** $\varnothing$ 被约定为 $\{0\}$ 的一组基。
- 空集是线性无关的（因为不存在向量使非平凡线性组合为零向量的情况，这是“空真”成立）。
- 空集张成 $\{0\}$ 吗？
  空集的张成 $\operatorname{span}(\varnothing) = \{0\}$，因为线性组合没有向量，只有零向量（零个向量的线性组合定义为 0）。
- 所以 $\varnothing$ 是 $\{0\}$ 的一个基。
- 基的向量个数 = 0，所以 $\dim\{0\} = 0$。

2. 所有单元素向量空间都是如此吗？

- 假设 V 是单元素集合，那么它只能是 $\{0\}$。
  为什么？
  因为向量空间必须满足：对任意标量 a 和向量 v，有 $av \in V$。
  如果 V 只有一个向量 u，取 $a = 0$，则 $0 \cdot u = 0$ 必须在 V 中，所以 $0 \in V$，因此 u 必须是 0。
- 所以所有单元素向量空间都是 $\{0\}$，因此它们的维数都是 0。

所以只要矩阵化简后不存在零行，就只有唯一解 $x=0$

线性齐次方程组 $Ax=0$ 要么有唯一解 $x=0$，要么有无数解

齐次方程组 $Ax = 0$ 的解集是 向量空间（核空间）：

- 必含零向量
- 对线性组合封闭
- 所以要么是 **零维**（唯一解 0），要么是 **正维**（无穷多解）

非齐次方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 的解集是 仿射空间：

- 是核空间的一个平移
- 可能 空（若 b 不在值域中）
- 若解集非空，则要么是 **单个点**（核空间为零维），要么是 **无穷多解**（核空间为正维）

一句话总结：
向量空间必含零且对线性运算封闭 ⇒ 解数只能是 1 或 ∞；仿射空间可能空且是平移 ⇒ 解数可能是 0、1 或 ∞。

仿射空间的定义：

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，X 是一个集合，如果存在一个映射 $+: X \times V \to X$（称为平移映射），满足：

1. **平移结合性：** $\forall x \in X, \forall u, v \in V, (x + u) + v = x + (u + v)$
2. **零平移不变：** $\forall x \in X, x + 0 = x$
3. **平移可逆性：** $\forall x, y \in X, \exists! v \in V$ 使得 $y = x + v$

则称 X 为 **仿射空间**，V 称为它的 **方向向量空间**。

几何理解：
仿射空间= 向量空间去掉原点概念，只保留"点"和"向量"的区分。

定理2.6.6 设A是$m\times n$矩阵，P,Q分别是m阶和n阶可逆矩阵，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$.

矩阵的秩

矩阵的秩：矩阵A的最高阶非零子式的阶数，记为 $r(A)$

- 初等变换不改变矩阵的秩　例2.5.2
- 行梯形矩阵的秩等于非零行的个数　例2.5.2
- 满秩矩阵(可逆矩阵)可以经过一系列初等行(列)变换变成单位矩阵
- 任意矩阵A可以分解为矩阵的乘积 $A=P\Lambda Q$，其中P, Q可逆，Λ为标准形　例2.6.6
- 任意可逆矩阵可以表示成有限个初等矩阵的乘积
- $r(A^T)=r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$，其中$P, Q$可逆
- $r(A+B)\le r(A)+r(B)$，$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$ 补充例21

矩阵的计算

计算矩阵A的逆： 初等行变换 $(A,E)\to(E,P)$，则 $P=A^{-1}$　例2.6.10

解矩阵方程 $AX=B$： 初等行变换 $(A,B)\to(E,S)$，则 $X=S=A^{-1}B$　例2.6.11

解矩阵方程 $XA=B$： 初等列变换 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E\\S\end{pmatrix}$，则 $X=S=BA^{-1}$

求可逆阵P使得 $PA=B$为行简化梯形: 初等行变换 $(A,E)\to(B,P)$　习题二20

一般地，设 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, ($e_1, e_2, \dots, e_n$称为$n$维基本向量组)

定义2.7.2 (等价向量组) 设有两个向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$，若$A$组中的每一个向量都可由向量组$B$线性表示，则称向量组$A$可由向量组$B$线性表示．若两个向量组$A$，$B$可以相互线性表示，则称这两个向量组等价．

*例2.7.6、例2.7.7 的进一步说明(矩阵形式)

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的组合系数$k_1, k_2, k_3$有关系

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\theta,\text{即求}Ck=\theta.$$

例2.7.6 $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,只有零解.

例2.7.7 $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$,有非零解$k_1=1,k_2=1,k_3=-2$.

定理2.7.3 n维列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关的充要条件是 $r(A)<r$，
其中矩阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.
换言之，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是$r(A)=r$.

例2.7.10 设n维列向量组A:$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关，$B$为$n$阶方阵. 试证向量组$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是B为可逆矩阵.

证明 必要性. 设$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$ 线性无关，则
$0\neq|B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n|=|B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)|=|B|\,|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n|$,
从而 $|B|\neq0$，即B可逆.

充分性. 设B是可逆矩阵. 令 $k_1B\alpha_1+k_2B\alpha_2+\dots+k_nB\alpha_n=\theta$,
用B^{-1}左乘两端，得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n=\theta$.
由线性无关知：$k_1=k_2=\dots=k_n=0$. 故$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$线性无关 .

证法二 "=>" $n=r(B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n)=r(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))\leq r(B)$，故$B$可逆.
"<=" B可逆，$r(B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n)=r(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$
$=r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=n$. 故$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_n$无关.

例2.7.10拓展思考 设n维列向量组A:$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性无关，$B$为$n$阶方阵.
(1) $B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m$线性无关=>$B$可逆？
(2) B可逆=>$B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m$线性无关？

(不同之处在于向量数只有m)

答案：(1) B不一定可逆，反例：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(2) $k_1B\alpha_1+\dots+k_mB\alpha_m=\theta$,左乘B^{-1} => $k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m=\theta$ => $k_1=\dots=k_m=0$

即设$C=(B\alpha_1, B\alpha_2, \dots, B\alpha_m)$，$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$，$C=BA$

C各列线性无关，由为n维，所以$m\leq n$，$r(C)=m$，$r(A)=m$ (由定理2.7.3)

$r(A)+r(B)-n\leq r(BA)\leq r(A)=m$ $\therefore m+r(B)-n\leq m \Rightarrow r(B)\leq n$

第2个条件：$\begin{pmatrix}A&O\\I&B\end{pmatrix}$ 相抵于 $\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，这是一个充要条件

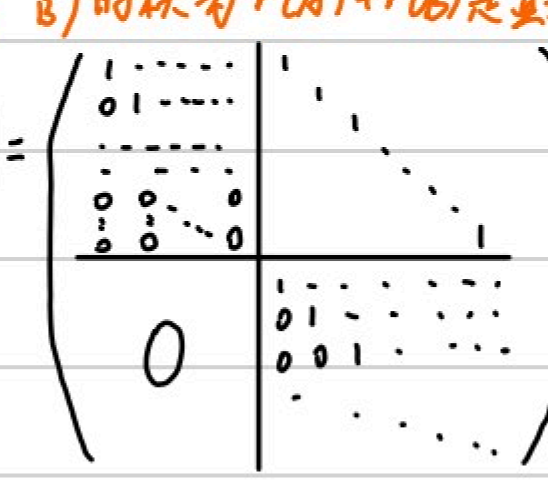
$$proof:$$
$$\begin{pmatrix}AB&O\\I&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}AB&A\\O&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O&A\\-B&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&O\\I&B\end{pmatrix}$$
$$r(AB)=r(A)+r(B)-n$$
$$\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}AB&O\\O&I\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$$
$$r\begin{pmatrix}A&O\\I&B\end{pmatrix}\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A&O\\I&B\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$$
$$Q.E.D.$$

第3个条件：$\exists X,Y$ s.t. $XA-BY=I$,这个也是个充要条件,相当于第二问的推论

$$proof:$$
$$r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&O\\I&B\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\exists X,Y s.t. XA-BY=I$$
$$Q.E.D.$$

对于上述命题我们有更一般的 $AX-YB=C\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$

分块矩阵$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$的秩为$r(A)+r(B)$是显然的。

对于 $\begin{pmatrix}A&E\\0&B\end{pmatrix}=$ 

算了，我好像的确很难根据已知条件自动推出B需要满足的额外性质。总之确实不足以确定$r(B)=n$，所以无法确定B可逆。

定义2.7.4 (极大无关组) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是某一向量组的部分组，满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关；

(2) 在原向量组中任取向量α，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha$都线性相关，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$是原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

定理2.7.7 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{ir}$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的一个极大线性无关组，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$中任一向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{ir}$线性表示，且表示法唯一.

推论2.7.8 向量组与它的任意一个极大无关组等价.

推论2.7.9 一个向量组的各个极大无关组之间是等价的.

推论2.7.10 两个向量组等价的充要条件是一组的一个极大无关组与另一组的一个极大无关组等价.

补充定理：初等行变换不改变列向量组的组合关系.

进一步，初等行变换将极大无关组仍然变为极大无关组.

定义2.7.5 (向量组的秩) 向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个极大无关组所含向量的个数定义为该向量组的秩，记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$.

规定仅含零向量的向量组的秩为 0 .

定理2.7.12 设A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是两个同维数的向量组，若向量组A可以由向量组B线性表示，则必有

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \le r\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}.$$

进一步有：等价的向量组必有相同的秩 .

注：由于矩阵的行秩、列秩、秩相等，故对于$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$下列记号表示相同含义：

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$0 \le r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$;

$r(A^T)=r(A)$; $r(kA)=r(A), k\neq 0$

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$;

$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$; (n为A的列数)

$$\max\{r(A), r(B)\}\le r((A, B))\le r\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B);$$

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$. (P , Q非奇异)

30 有同学伴随矩阵用于分块矩阵求分块矩阵的逆，即 $X=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$ 得到 $X^*=\begin{pmatrix}B&O\\O&A\end{pmatrix}$，再进一步求逆，有错，因为若 $X=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&&&\\&2&&\\\hline&&3&\\&&&4\end{array}\right)$，则 $X^*=\left(\begin{array}{cc|cc}24&&&\\&12&&\\\hline&&8&\\&&&6\end{array}\right)$，并非 $X^*=\begin{pmatrix}B&O\\O&A\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&&&\\&4&&\\\hline&&1&\\&&&2\end{array}\right)$.

另外还有很多同学直接给出答案，没有过程，此题的 X^{-1},Y^{-1} 可以看出来，但是 Z^{-1} 不容易看出来的. 可如下：

解 易知 $X^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$，$Y^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

设 $Z^{-1}=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix}$，则由 $ZZ^{-1}=\begin{pmatrix}O&A\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AM_{21}&AM_{22}\\BM_{11}+CM_{21}&BM_{12}+CM_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$，

可得 $\begin{cases}AM_{21}=E,\\AM_{22}=O,\\BM_{11}+CM_{21}=O,\\BM_{12}+CM_{22}=E.\end{cases}$，解得 $M_{21}=A^{-1}$，$M_{22}=O$，$M_{11}=-B^{-1}CA^{-1}$，$M_{12}=B^{-1}$，即 $Z^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

设 $G=\mathrm{diag}(G_{11},G_{22})$，其中 $G_{11}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix},G_{22}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}$.

又 $G_{11}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3/2\\0&1/2\end{pmatrix},G_{22}^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-3\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2\\1/3&1/6\end{pmatrix}$，故 $G^{-1}=\begin{pmatrix}G_{11}^{-1}&O\\O&G_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3/2&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&0&1/2\\0&0&1/3&1/6\end{pmatrix}$.

解法二 易知 $X^{-1}=\mathrm{diag}(A^{-1},B^{-1})$,

$Y=\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}$, 可得 $Y^{-1}=\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}$，

$Z=\begin{pmatrix}E&O\\CA^{-1}&E\end{pmatrix}Y$, 可得 $Z^{-1}=Y^{-1}\begin{pmatrix}E&O\\CA^{-1}&E\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

因为 $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3/2\\0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2\\1/3&1/6\end{pmatrix}$，故 $G^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3/2&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&0&1/2\\0&0&1/3&1/6\end{pmatrix}$.

35 有同学得到 $|A|^2=|A|^3$ 时直接得出 $|A|=1$，也有同学由 $AA^T=|A|E$ 得到 $|A||A^T|=|A||E|=|A|$ 即 $|A|^2=|A|$. 可如下：

证：$A^*=A^T$，故有 $AA^T=AA^*=|A|E$. 两边取行列式得 $|A|^2=|A|^3$，故 $|A|=0$ 或 1. 再由 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=3a_{11}^2>0$，得 $|A|=1$，故 $a_{11}=1/\sqrt{3}$.

这种确实阴。非常易错的点在于 $|kA|=k^n|A|$. 因 kA 相当于每一行都乘 k，故行列式需提出 n 个 k.

40、41 有同学用元素表示 A 来证明，较繁且容易有遗漏. 另外有些同学该题证明有如下一些问题：(a) 由 $\alpha^T\alpha=1$，直接得出 $\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha\alpha^T$，跳步骤，应该写 $\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=\alpha\alpha^T$；(b) 由 $\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha\alpha^T$ 直接得出 $\alpha^T\alpha=1$，也是跳步骤，应该写成 $\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=\alpha\alpha^T$，故 $((\alpha^T\alpha)-1)\alpha\alpha^T=O$，因为 $\alpha\neq\theta$，故 $\alpha\alpha^T\neq O$，于是 $\alpha^T\alpha=1$.

此题可如下证明：

40 证 (1) $A^2-A=E-2\alpha\alpha^T+\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T-(E-\alpha\alpha^T)=(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T=(\alpha^T\alpha-1)\alpha\alpha^T$，

又 $\alpha\neq\theta$，知 $\alpha\alpha^T\neq O$，故 $A^2-A=O\Leftrightarrow\alpha^T\alpha-1=0$，即 $A^2=A\Leftrightarrow\alpha^T\alpha=1$.

(2) 因为 $A\alpha=(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)=(1-\alpha^T\alpha)\alpha=\theta$，又 $\alpha\neq\theta$，故 $Ax=\theta$ 有非零解，于是 $|A|=0$，即 A 不可逆.

或：假设 A 可逆，$A\alpha=(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)=(1-\alpha^T\alpha)\alpha=\theta$，左乘 A^{-1} 得 $\alpha=\theta$，与 $\alpha\neq\theta$ 矛盾，故 A 不可逆.

或：假设 A 可逆，由(1)的结论知 $A^2=A$，两边左乘 A^{-1} 得 $A=E$，与 $A=E-\alpha\alpha^T,\alpha\neq\theta$ 矛盾，故 A 不可逆.

41 证明：(1) $A^T=(E-2\alpha\alpha^T)^T=E^T-2(\alpha\alpha^T)^T=E-2(\alpha^T)^T\alpha^T=E-2\alpha\alpha^T=A$，对称.

(2) $A^2=(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=E$，幂幺.

60 有同学证明过程有错，也有同学由 $r(A)=r(A,B)$ 得出 B 列可由 A 列表示，跳步骤. 可如下：

证：因为 A 组能由 B 组线性表示，故 B 的极大无关组也是 $\{A,B\}$ 的极大无关组，于是 $r(A,B)=r(B)$.

又 $r(A)=r(B)=r(A,B)$，故 A 组的极大无关组也是 $\{A,B\}$ 的极大无关组，故 B 组也能由 A 组表示，于是 A 与 B 等价.

47 有同学线性相关设为 $\beta_3=k\beta_1+m\beta_2$，错误，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关不一定 β_3 多余(如 e_1,e_1,e_2).

不知道为什么刚刚好像漏掉一个重要的东西，即r(A)与r(A*)的关系：

矩阵与伴随矩阵的秩的关系

设 A 为 $n \times n$ 矩阵，则：

$$r(A^*) = \begin{cases} n, \text{if } r(A) = n, \\ 1, \text{if } r(A) = n-1, \\ 0, \text{if } r(A) \le n-2. \end{cases}$$

推导简述

1. 若 $r(A) = n$
   A 可逆，$A^* = \det(A)A^{-1}$，所以 $r(A^*) = n$。
2. 若 $r(A) = n-1$
   $\det(A) = 0$，但至少有一个 $(n-1)$ 阶子式非零，故 $A^* \ne 0$。
   由 $AA^* = \det(A)I = 0$ 得 每列 of $A^* \in \ker(A)$，且 $\dim(\ker(A)) = 1$，所以 $r(A^*) = 1$。
3. 若 $r(A) \le n-2$
   所有 $(n-1)$ 阶子式为 0，故 $A^* = 0$，所以 $r(A^*) = 0$。

线性相关、无关的基本性质：

- 向量α线性相关⇔ $\alpha = \theta$.
- 向量α_1, α_2线性相关⇔α_1, α_2成比例
- 包含零向量的向量组必线性相关.
- 向量组部分相关=>整体相关；整体无关=>部分无关　例2.7.9

判断相关性

齐次方程组与线性相关

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ 有非零解 ⇔ $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 线性相关

- 向量组线性相关⇔有一个多余向量
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$相关，则$\beta$可被唯一表示　补充例2L

判断相关性

- 列向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性相关⇔ $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) < r$　例2.7.11
- 向量个数大于维数，向量组相关　习题二50
- 向量个数等于维数，则线性无关⇔行列式非零　例2.7.15证法二
- 非零子式对应的列(行)线性无关

齐次方程组基础解系的进一步讨论

对行简化梯形进行调整：行简化梯形去掉0行；插入行使得非零行首1在对角元，插入的新行对角元-1其余0

具体例子： 行简化:$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

行简化:$\begin{pmatrix}0&1&3&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&3&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&3&0&-1\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$

行简化梯形调整后提取方程组的基础解系：

例3.4.5 求齐次方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\\2x_1+2x_2+x_3=0,\\x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0,\\4x_1+6x_2-x_3+2x_4=0,\\2x_1-2x_2+7x_3-4x_4=0\end{cases}$ **的基础解系.**

草稿纸： 矩阵调整为 $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3/2&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

-1对应列即基础解系，最好取负.

解 $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&2&1&0\\1&4&-4&3\\4&6&-1&2\\2&-2&7&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&3&-2\\0&2&-3&2\\0&-2&3&-2\\0&-6&9&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3/2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, **故基础解系为** $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\3/2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

例3.4.6 求齐次方程组 $\begin{cases}2x_1-4x_2+2x_3+7x_4=0,\\3x_1-6x_2+4x_3+4x_4=0,\\4x_1-8x_2+4x_3+15x_4=0\end{cases}$ **的基础解系.**

草稿纸： 矩阵调整 $\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix}2&-4&2&7\\3&-6&4&4\\4&-8&4&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&3.5\\0&0&1&-6.5\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, **得基础解系为 α=(2,1,0,0)^T.**

原理：以例3.4.6为例进行说明：

行简化梯形 $\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2=0,\\x_3=0,\\x_4=0\end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_2,\\x_3=0,\\x_4=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xLeftarrow{\text{右端合并到左边}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2t,\\x_2=t,\\x_3=0,\\x_4=0\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},t\in\mathrm{R}.$

基础解系

定理3.4.7 若$A\eta=b$ ($b\neq\theta$)，则$Ax=b$ 的通解可以表示为

$$\eta+\alpha,$$

其中α为 $Ax=\theta$的解. 若$Ax=\theta$ 的基础解系为$\alpha_1,\dots,\alpha_r$，则 $Ax=b$ 的通解为：$\eta+k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r$，其中$k_1,\dots,k_r\in\mathbf{R}$为任意实数 .

证明 由$A(\eta+\alpha)=A\eta+A\alpha=b+\theta=b$，故$\eta+\alpha$为$Ax=b$的解.
设β为$Ax=b$的任意一个解，则$A(\beta-\eta)=A\beta-A\eta=b-b=\theta$，即$\beta-\eta$为$Ax=\theta$的一个解，设为$\alpha$，则有$\alpha=\beta-\eta$，即$\beta=\eta+\alpha$.
综合上述，通解为：$\eta+\alpha=\eta+k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r$.

非齐次方程组的通解为：一个特解+相应齐次方程组的通解.

补充例3I (行简化调整) 例：求非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=6, \\ 2x_1+4x_2+x_3-x_4=3, \\ x_1+2x_2-3x_3+3x_4=12, \\ 4x_1+8x_2-2x_3+2x_4=18. \end{cases}$ 的通解.

解 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 & 12 \\ 4 & 8 & -2 & 2 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

草稿纸：矩阵调整 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

可得方程组的一个特解：$\eta=(3,0,-3,0)^T$. 对应齐次方程组的一个基础解系为 $\alpha_1=(-2,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,0,1,1)^T$.
于是所求通解为：$x=\eta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

原理：

以上述补充例3I为例进行说明：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ x_3-x_4=-3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=3-2x_2, \\ x_3=-3+x_4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xleftarrow{\text{扩展的右端合并到左边}} \left(\begin{array}{cccc|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=3-2s, \\ x_2=s, \\ x_3=-3+t, \\ x_4=t \end{cases} \text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$