微积分复习

7. 柯西–施瓦兹 (Cauchy† - Schwarz‡) 不等式：设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

8. 闵可夫斯基 (Minkowski§) 不等式：设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, δ 为某个正数, 称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\}$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**, 简称**点 x_0 的邻域**, 记为 $N_\delta(x_0)$, 即 $N_\delta(x_0) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\}$. 称 $N_\delta(x_0) \backslash \{x_0\} = \{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta\}$ 为**点 x_0 的 δ 去心邻域**, 简称**去心邻域**, 记为 $\mathring{N}_\delta(x_0)$. 称开区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的右邻域**, 记为 $N_\delta^+(x_0)$; 开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 为**点 x_0 的左邻域**, 记为 $N_\delta^-(x_0)$.

注 有时在表示上述各种邻域的记号中, 右下角的“δ”可以省去不写.

当 M 为充分大的正数时, 如下数集

$$U(\infty) = \{x \mid |x| > M\},\quad U(+\infty) = \{x \mid x > M\},\quad U(-\infty) = \{x \mid x < -M\},$$

分别称为 ∞ 邻域, $+\infty$ 邻域, $-\infty$ 邻域.

三角函数有很多有用的恒等式, 在以后的学习中经常会用到, 我们列举一些如下：

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
(2) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$,

(3) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$,
(4) $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$,

(5) $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$,
(6) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$,

(7) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$,
(8) $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$,

(9) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$,
(10) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,

(11) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,
(12) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

(13) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,
(14) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

(15) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$,
(16) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$,

(17) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$,
(18) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

(19) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$,

(20) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$,
(21) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$,

(22) $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$,
(23) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$,

(24) $\sin^4\alpha = \dfrac{1}{8}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$,
(25) $\cos^4\alpha = \dfrac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$.

下面介绍一类由 e^x 生成的初等函数 —— 双曲函数:

$$\operatorname{sh} x=\sinh x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{ch} x=\cosh x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right),$$
$$\operatorname{th} x=\tanh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x=\operatorname{coth} x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}},$$

分别称为**双曲正弦函数**、**双曲余弦函数**、**双曲正切函数**、**双曲余切函数**. 它们的图形见图 1.7. 它们有下列恒等式:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh}(x \pm y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, && \operatorname{ch}(x \pm y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,\\
&\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, && \operatorname{sh} 2x=2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,\\
&\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x, && \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\\
&\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, && \operatorname{th} 2x=\frac{2 \operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x},\\
&\operatorname{cth} 2x=\frac{1+\operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x}.
\end{aligned}$$

定义 1.2.4 (数列极限的“ε-N 语言”) 设有数列 $\{x_n\}$, 若存在 $A \in \mathbb{R}$, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 也称 $\{x_n\}$ 收敛于 A, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=A, \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow A\ (n \rightarrow \infty).$$

并称数列 $\{x_n\}$ 为**收敛数列**, 反之称 $\{x_n\}$ 为**发散数列**.

定理 1.2.1 (唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

证明 用反证法. 假设数列 $\{x_n\}$ 的极限不唯一, 不妨设其极限分别为 A, B, 且 $A \neq B$, 即此时我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=A$ 以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=B$. 我们取 $\varepsilon=\frac{|A-B|}{2}>0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 我们有 $|x_n-A|<\varepsilon$, $|x_n-B|<\varepsilon$, 注意到

常用技巧

$$2\varepsilon=|A-B|=|A-x_n+x_n-B| \leqslant |A-x_n|+|x_n-B|<2\varepsilon,$$

定义 1.2.7 (数列极限的“G-N 语言”) 设有数列 $\{x_n\}$, 若对于任意的 $G>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时有 $x_n>G$ (或 $x_n<-G$, $|x_n|>G$) 成立, 则称 $n \rightarrow \infty$ 时 $\{x_n\}$ 是一个**正无穷大量** (或**负无穷大量**, **无穷大量**). 习惯上也说, $\{x_n\}$ 以 $+\infty$ (或 $-\infty, \infty$) 为极限. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=+\infty, \quad (\text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n=-\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n=\infty).$$

定义 1.2.8 (“ε-δ 语言”) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义, A 为一给定的常数. 若对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限为 A, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=A, \quad \text{或} \ f(x) \rightarrow A \ \ (x \rightarrow x_0).$$

定义 1.2.9 (单侧极限)　设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, 记 $N^+(x_0)$(或 $N^-(x_0)$) 为点 x_0 的某右邻域(或左邻域). $f(x)$ 在 $N^+(x_0)$ (或 $N^-(x_0)$) 上有定义, 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ (或 $0 < x_0 - x < \delta$) 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**右极限 (或左极限)** 为 A, 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A, \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A,$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

右极限和左极限统称为**单侧极限**.

定义 1.2.11 ("G-δ 语言")　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义, 若对于任意的 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > G$, 则称 当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 发散到 $+\infty$, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{或} f(x) \to +\infty \ (x \to x_0).$$

定理 1.2.14　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是: 对任何数列 $\{x_n\}$, 且 x_n 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内, $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$), 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. (重要结论)

证明　必要性. 设 $f(x) \to A$ ($x \to x_0$), 则 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 因 $x_n \to x_0$, 故对上述 $\delta > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 于是 $n > N$ 时, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 由数列极限的定义知, 数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限为 A. 必要性得证.

充分性. 用反证法证明. 设 $f(x) \nrightarrow A$ ($x \to x_0$), 则 $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \delta = \dfrac{1}{n}, \exists\, \bar{x}_n \in \mathring{N}_\delta(x_0)$, 使得 $|f(\bar{x}_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$. 因为 $0 < |\bar{x}_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, 显然 $\bar{x}_n \to x_0$, 但由定义 1.2.6 知数列 $\{f(\bar{x}_n)\}$ 不以 A 为极限. 此与条件矛盾. 充分性得证. □

该定理给出了函数极限和数列极限之间的一种关系, 常用于判定某些函数的极限的不存在性. 也可由已知的函数极限得到数列的极限, 例如, 前面我们已经证明了

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \ (a > 0),$$

则我们根据定理 1.2.14 直接可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0).$$

推论 1.2.15　设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathring{N}(x_0)$ 为点 x_0 的某去心邻域. 若存在 $x_n, y_n \in \mathring{N}(x_0)$, $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, 使得 $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$ ($n \to \infty$), 但 $A \neq B$, 则函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限不存在.

例 1.2.9　证明极限 $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明　取 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, $f(x_n) \to 1$, $f(y_n) \to 0$ ($n \to \infty$), 所以 $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ 不存在. □

定义 1.2.12 (无穷小量)　若 $\lim \alpha = 0$, 则称 α 是这一极限过程中的一个**无穷小量**, 简称**无穷小**.

例如, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, 则 $\dfrac{1}{x}$ 是 $x \to \infty$ 时的一个无穷小. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+9}{n^2-7} = 0$, 则 $\dfrac{4n+9}{n^2-7}$ 是 $n \to \infty$ 时的一个无穷小.

注　一个很小很小的数不是无穷小, 例如 $\mathrm{e}^{-10^{10}}$.

下面我们来讨论无穷小的性质.

定理 1.2.16　有限个无穷小之和仍为无穷小.

证明　我们就 $\alpha_i = f_i(x)(i = 1, 2, \cdots, k)$, $x \to x_0$ 的情形进行讨论. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 即 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 我们有 $|f_i(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k}$, 所以 $\left|\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x)\right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |f_i(x)| < \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) = 0$. □

定理 1.2.17　无穷小与有界变量之积仍为无穷小.

推论 1.2.18　常量与无穷小之积为无穷小.

推论 1.2.19　两个无穷小之积为无穷小.

推论 1.2.20　有限个无穷小之积仍为无穷小.

定理 1.2.21 (极限存在的变量与无穷小之间的关系)　$\lim X = A$ 的充分必要条件是 $X = A + \alpha$, 其中 $\lim \alpha = 0$.

1. 无限个无穷小之和不一定为无穷小 (符合直觉)
2. 无限个无穷小之积不一定为无穷小 (反直觉)

构造:

$$\left.\begin{array}{l} a_1(n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \\ a_2(n): 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \\ a_3(n): 1, 2, 3, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \\ \vdots \\ a_n(n): 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots \end{array}\right\}$$

相乘后为无穷大, 但每一个都是无穷小

(也存在别的构造。不过严格而言,"无数个无穷小之积"定义并不明确。具体可见知乎专栏 [1])

[1] Tetradecane, "Most comprehensive and accurate explanation: Is the product of infinitely many infinitesimals necessarily infinitesimal?," *Zhihu*, Dec. 16, 2022. [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/88642140 ↗

定义 1.2.13 (无穷大量)　若 $\lim X = \infty$, 则称 X 是这一极限过程中的一个**无穷大量**, 简称**无穷大**.

值得注意的是, 无穷大量是一个变量, 与符号 ∞ 不同, 后者只是一个符号.

例如, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, 则 n^2 是 $n \to \infty$ 时的一个无穷大. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} = \infty$, 则 $\dfrac{1}{x^3}$ 是 $x \to 0$ 时的一个无穷大.

定理 1.2.22　设 $\alpha \neq 0$, 则 $\lim \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim \dfrac{1}{\alpha} = \infty$.

定理 1.2.24 (夹逼准则)　设在某极限过程中 $X \leqslant Y \leqslant Z$, 且

$$\lim X = \lim Z = A, \text{ 则 } \lim Y = A.$$

定理 1.2.25 (单调有界准则) 上有界的增加数列与下有界的减少数列均收敛 (即单调有界数列必收敛).

(常用结论)

证明 我们只对下有界的减少数列给出证明, 上有界的增加数列的证明读者可以仿此证之. 设 $\{x_n\}$ 为减少数列, 若将 $\{x_n\}$ 看成实数集合, 则其为下有界集合, 由定理 1.1.1 知它必有唯一的下确界 A, 下面我们将证明 $x_n \to A$. 由确界定义 1.1.2 我们知道, (1) $x_n \geqslant A$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使得 $x_N < A + \varepsilon$, 当 $n > N$ 时, 必有 $x_n \leqslant x_N < A + \varepsilon$, 所以合并 (1), (2), 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 因此就有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. □

定理 1.2.26 (函数极限的单调有界准则) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调增加且有上界 (或单调减少且有下界), 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限 $f\left(x_0^-\right)$ 必存在.

定理 1.2.27 (关于数列极限的柯西准则) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $m, n > N$ 时有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

证明 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N, m > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以 $|x_n - x_m| \leqslant |x_n - A| + |x_m - A| < \varepsilon$.

充分性. 因为要用到实数的一些定理, 已超出本课程的大纲范围, 证明略去. □

定理 1.2.28 (关于函数极限的柯西准则) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}_\delta(x_0)$ 内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1\,(<\delta) > 0$, 使得对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathring{N}_{\delta_1}(x_0)$, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

定义 1.2.14 (无穷小量的阶) 假设 α 与 β 为同一极限过程中的两个无穷小量,

(1) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α **是** β **的高阶无穷小**, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

(2) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α **是** β **的低阶无穷小**;

(3) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta^k} = c \ \ (c \neq 0,\, k > 0)$, 则称 α **是** β **的** k **阶无穷小**; 如果 $k = 1$, 则称 α **与** β **为同阶无穷小**; 如果 $k = 1$, $c = 1$, 则称 α **与** β **为等价无穷小**, 记为 $\alpha \sim \beta$.

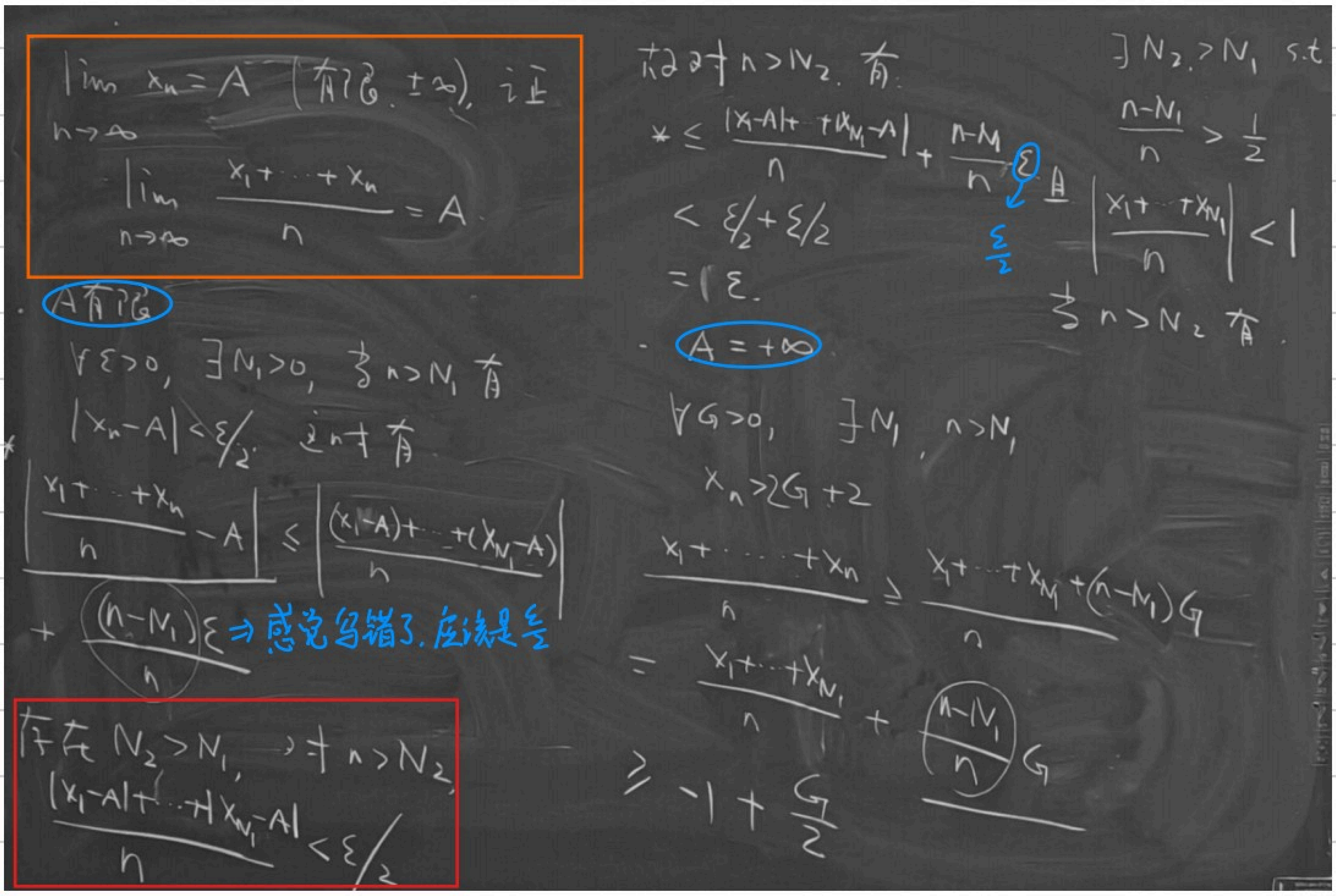
定理 1.2.31 (等价无穷小因子替换定理) 设在某极限过程中, $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ 均为恒不为零的无穷小量, 且 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, u, v 为已知变量, 则

$$\lim(\alpha \cdot u) = \lim(\alpha_1 \cdot u); \quad \lim \frac{\alpha \cdot u}{\beta \cdot v} = \lim \frac{\alpha_1 \cdot u}{\beta_1 \cdot v}.$$

特别地有: $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

只要上面等式的一端极限存在, 则另一端一定存在.

一般在加减法中不可直接用等价无穷小的替换。一个可行的思路是改用带 Peano 余项的泰勒公式



一个更符合直觉的做法:

$\because \lim_{n\to\infty} x_n = A$ $\therefore \forall \varepsilon>0$, $\exists N_1$,

$n>N_1$ 时, $|x_{N_1}-A|<\varepsilon$

对于 $n=1,2,\cdots,N_1$,

$\frac{|x_1-A|+|x_2-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} \to 0$

对于 $n>N_1$,

$\frac{|x_{N_1+1}-A|+\cdots+|x_n-A|}{n} < \frac{n-N_1}{n}\varepsilon$

$\frac{n-N_1}{n}\varepsilon \to \varepsilon$

但此方法完全不严谨。

Example

设 $x\to 0$ 时, $\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}$ 与 x^k 为同阶无穷小, 求 k.
若取 x 为基准无穷小, 求 $\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}$ 的主部.

Proof.

$\tan^2 x-\sin^2 x$
$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x$
$=\frac{\sin^2 x\cdot\sin^2 x}{\cos^2 x}$
$=\tan^2 x\cdot\sin^2 x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^k}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{x^k(\sqrt{1+\tan^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x\cdot\sin^2 x}{2x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^k}=\frac{1}{2}\ (k=4).$$

所以, $\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}$ 与 x^4 为同阶无穷小,
$\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}$ 的主部为 $\frac{x^4}{2}$.

5. (1) $A\in\mathbb{R}$. 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ 知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N_1$, $|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\left\{N_1, \left[\frac{2}{\varepsilon}\left|\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-A)\right|\right]+1\right\}$, $\forall n>N$, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-A\right| &\le \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-A)\right|+\frac{1}{n}\sum_{i=N_1+1}^{n}|x_i-A| \\ &\le \frac{1}{N}\left|\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-A)\right|+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=A$.

(2) $A=+\infty$. 由 $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 知 $\forall M>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N_1$, $x_n>4M$. 取 $N=\max\left\{2N_1, \left[\frac{1}{M}\left|\sum_{i=1}^{N_1}x_i\right|\right]+1\right\}$, $\forall n>N$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_1}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=N_1+1}^{n}x_i \\ &\ge -M+4\frac{n-N_1}{n}M \\ &> -M+2M=M.\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=+\infty$.

(3) $A=-\infty$ 的情形和 $A=+\infty$ 的情形类似.

定义 1.3.1 (点连续) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $N(x_0)$ 上有定义, 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

也即对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

则我们就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

注　在这个定义中包含了三个要点：

(1) 函数 $f(x)$ 必须在点 x_0 处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 必须存在;　　(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义 1.3.2 (左、右连续)　设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $U = [x_0, x_0 + \delta)$ (或 $(x_0 - \delta, x_0]$), 函数 $f(x)$ 在 U 中有定义, 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$). 则我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **右连续 (或左连续)** .

函数在一点处的左连续和右连续统称为**单侧连续**. 由于函数的连续性是用极限来定义的, 因此由定理 1.2.8 立即就有函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续与它在该点的单侧连续之间的关系.

定理 1.3.1　函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

定义 1.3.3 (连续函数)　设函数 $f(x)$ 在一个开区间 I 上有定义, 且函数 $f(x)$ 在该区间上每一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**连续函数**.

注　当区间 I 包含端点时, 函数 $f(x)$ 在 I 内连续, 在左端点处右连续, 在右端点处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在此闭区间 I 上连续.

定理 1.3.2　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内有界.

定理 1.3.3　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > p$ (或 $f(x_0) < q$), 则 $\exists \delta > 0$, 使得在 $N_\delta(x_0)$ 内, $f(x) > p$ (或 $f(x) < q$) .

注　当 $p = 0$(或 $q = 0$) 时, 这就是连续函数的**局部保号性**.

推论 1.3.4　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$, 则对任一个正数 $d < |f(x_0)|$, $\exists \delta > 0$, 使得在 $N_\delta(x_0)$ 内, $|f(x)| > d$.

定理 1.3.8　设 $f(u)$ 在点 b 连续, 若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ (x_0 为有限或 $\pm\infty$), 则

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(b).$$

证明: 利用连续性和极限定义. 先对于 f, 对任意 ε, $\exists \delta > 0$, 当 $|u - b| < \delta$ 时, $|f(u) - f(b)| < \varepsilon$ (连续性)

$\because \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$　$\therefore \forall \delta > 0$, $\exists \delta' > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta'$ 时, $|g(x) - b| < \delta$, 此时有 $|f(u) - f(b)| < \varepsilon$, 由极限定义,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(b) = f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x))$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin x \sim x, & \tan x \sim x, \\ \arcsin x \sim x, & \arctan x \sim x, \\ \ln(1+x) \sim x, & e^x - 1 \sim x, \\ 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, & (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (\mu \in \mathbb{R}). \end{array}}$$

常用等价无穷小

假设 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个间断点, 那么它有下列两种可能性.

(1) 若 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 均存在, 则称此类间断点为**第一类间断点**.

(1°) 若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 则称此类间断点为**跳跃间断点**. 例如取整函数 $y = [x]$ 在整数点

(2°) 若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 则称此类间断点为**可去间断点**. 例如 $y = \dfrac{\sin x}{x}$, 此函数在 $x = 0$ 处的单侧极限存在且相等, 所以 $x = 0$ 是 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点.

(2) 若 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 至少有一个不存在, 则称此类间断点为**第二类间断点**.

例如 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处两个单侧极限均不存在, 故 $x = 0$ 是 $y = \dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, 我们又称 $x = 0$ 为 $y = \dfrac{1}{x}$ 的**无穷间断点**.

$x = 0$ 也是 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点, 但由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 时其值在 $[-1, 1]$ 上不断变化, 因此我们又称 $x = 0$ 为 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的**振荡间断点**.

定理 1.3.11 (零点定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

定理 1.3.12 (介值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \neq f(b)$. μ 为满足不等式 $f(a) < \mu < f(b)$ 或 $f(a) > \mu > f(b)$ 的任何实数, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

证明 不妨设 $f(a) > \mu > f(b)$, 令

$$F(x) = f(x) - \mu,$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(a) > 0, F(b) < 0$. 由零点定理知, 存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \mu$. □

定理 1.3.13 (有界性定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

定理 1.3.14 (最值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值和最小值.

Example

讨论函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}}$ 的连续性, 其中 $x \geq 0$.

常用方法是比较各项的大小。

设

$$M_n = \max\{2, (2x)^n, x^{2n}\}.$$

那么

(夹逼定理)

$$M_n \leq a_n \leq 3M_n$$

（因为 a_n 是三项和，最大项至少占 M_n，最多不超过 $3M_n$）。

于是

$$\sqrt[n]{M_n} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{M_n}.$$

当 $n \to \infty$，$\sqrt[n]{3} \to 1$，所以

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n}.$$

$x^{2n} = (x^2)^n$，$(2x)^n$ 和 $(x^2)^n$ 比较 $\Rightarrow$ $x=0$ 和 $x=2$ 为分界

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$，$2x$ 和 $x^2 \leq 1$，$(2x)^n, (x^2)^n$ 均 < 2，$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

$\frac{1}{2} < x \leq 2$，当 $n \to +\infty$ 时，$(2x)^n, (x^2)^n$ 均 > 2，且 $(2x)^n > (x^2)^n$，

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(2x)^n} = 2x$

$x > 2$，当 $n \to +\infty$ 时，有 $(x^2)^n > (2x)^n > 2$，

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(x^2)^n} = x^2$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ 显然连续

$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$

$F(x) := f(x) - x$

$F(x_0) > 0,\quad F(x_1) < 0.$

F 连续，$[x_0, x_1]$

用对 $F(x)$ 零点定理

例：设 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续，且 $f(f(x)) = x$ 有实根，证明 $f(x) = x$ 也有实根

证：1° 设 x_0，$f(f(x_0)) = x_0$

若 $f(x_0) = x_0$，已证。

若 $f(x_0) \neq x_0$，不妨设 $f(x_0) > x_0$

但 $f(\underbrace{f(x_0)}_{x_1}) = x_0 < \underbrace{f(x_0)}_{x_1}$

$f(x_1) < x_1$，$f(x_0) > x_0$

2° 反证，否则，$\forall x$，$f(x) \neq x$，$f(x) - x \neq 0$

对 $\forall x$，要么有 $f(x) > x$ 恒成立

（$f(x) < x$）

设 $\forall x$，

$f(f(x)) > f(x) > x$ 矛盾

例：f 在 $[0, 2a]$ 上连续，且 $f(0) = f(2a)$，证至少存在一个点 $b \in [0, a]$ s.t. $f(b) = f(a+b)$

证明：令 $g(x) = f(x) - f(a+x)$

$g(0) = f(0) - f(a)$，$g(a) = f(a) - f(2a)$

又 $\because f(0) = f(2a)$ $\therefore g(0) = -g(a)$

i $g(0) = g(a) = 0 \Rightarrow$ 令 $b = 0$ 或 $b = a$

ii $g(0) \neq 0, g(a) \neq 0$，则由零点定理：

$(g(0) = -g(a)$，则 $g(0)g(a) < 0)$

$\exists b \in (0, a)$，$g(b) = 0$

此时有 $f(b) - f(a+b) = 0$

$\Rightarrow f(b) = f(a+b)$

例：证明：$S_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛。

$= \boxed{C + \alpha_n \\ > \frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\cancel{C} + \ln 2n + \alpha_{2n} - \cancel{C} - \ln n - \alpha_n\right)$

$= \ln 2$

证：1° 单调性

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$

＞单调有界即收敛

$> 0.$

C. 欧拉常数.

2° 有下界

$\ln n = \ln\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} \cdot 1\right)$

$= \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1))$

$\ln(k) - \ln(k-1) = \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) < \frac{1}{k-1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k}^{n} (\ln k - \ln \ldots$

我们知道调和数：

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

当 $n \to \infty$ 时，

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

其中 $\gamma \approx 0.5772156649$ 是欧拉常数，而 $\varepsilon_n \to 0$。

更精确地说，这个 ε_n 大约是：

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \ldots$$

$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} + \ln(k-1) - \ln k\right) > 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = 1 + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - 1 + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) = \frac{1}{n}$，故存在下界。

重点不在于 α_n 是多少，重点在于 $\alpha_n \to 0$，这足以让我们在右侧例题中直接视其为 0。

（实际上可以证明 α_n -

定理 2.1.5 (反函数的导数) 设函数 $x=\varphi(y)$ 在某一区间 I 内严格单调, 又在区间 I 内一点 y 处导数 $\varphi'(y)$ 存在且不为零, 则反函数 $y=f(x)$ 在对应点 $x(=\varphi(y))$ 处也是可导的, 且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\qquad\left(\text{即}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}\right).$$

有些复合函数, 在求导数时先取对数然后再求导数, 会使运算过程简化. 这种方法称为**对数求导法**.

我们也可以用这种“对数求导法”去计算例 2.1.22 的这个导数: 在 $y=u^v$ 的两端取对数, 得

(实际对乘积/商形式的函数时常有特效)

$$\ln y=v\ln u,$$

因为 y,u,v 都是 x 的函数, 我们可以把此式两端都单独作为 x 的函数, 而 y 是左端函数的中间变量; u 与 v 是右端函数的中间变量. 对此式两边求导数得

$$\frac{y'}{y}=v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u},$$

于是

$$\begin{aligned}y'&=y\left(v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)\\&=u^vv'\ln u+vu^{v-1}u'.\end{aligned}$$

定理 2.1.7 (参数方程所确定的函数的导数) 设函数 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 皆在区间 I 上可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 又若 $\varphi(t)$ 是严格单调的, 则由参数方程 (2.1.10) 确定的参数式函数 $y(x)$ 在 $X=\varphi(I)$ 上可导, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)\cdot(\varphi^{-1})'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.\tag{2.1.11}$$

如果曲线的方程表示为极坐标的形式 $\rho=\rho(\theta)$, 利用极坐标和直角坐标的关系, 可以将直角坐标 y 和 x 表示为极角 θ 的函数:

$$x=\rho(\theta)\cos\theta,\qquad y=\rho(\theta)\sin\theta,$$

于是, 极角 θ 起了式 (2.1.10) 中参数 t 的作用, 据式 (2.1.11)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}.\tag{2.1.12}$$

常用导数表:

(1) $(C)'=0\,(C\in\mathbb{R})$.

(2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}\,(\mu\in\mathbb{R})$.

(3) $(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,\ a\neq 1)$, $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

(4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

(5) $(\sin x)'=\cos x$.

(6) $(\cos x)'=-\sin x$.

(7) $(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(8) $(\cot x)'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

(9) $(\sec x)'=\sec x\tan x$.

(10) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

(11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(14) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

下面几个是关于双曲函数的导数公式:

(15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.　(16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.　(17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

(18) $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.　(19) $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.　(20) $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

定理 2.1.8 (n 阶导数的莱布尼兹公式)　若函数 $u(x)$, $v(x)$ 都有 n 阶导数, 则它们的乘积 $u(x)v(x)$ 也有 n 阶导数, 且下面的公式成立,

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots \\ &\quad + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

其中 $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$.

这个公式称为**莱布尼兹公式**.

三、参数式函数的二阶导数

由式 (2.1.11) 知参数式方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

所确定的函数 $y(x)$ 对 x 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

为了继续求 $y(x)$ 对 x 的二阶导数, 我们只需利用同样的方法对如下参数式方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$$

求导即可. 也就是说,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

进一步, 由函数求导的四则运算法则以及反函数的导数公式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}.\end{aligned}$$

定义 2.2.1 (微分) 相应于自变量在点 x 的增量 Δx, 函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, 若能表示为

$$\Delta y = A(x)\Delta x + o(\Delta x), \tag{2.2.1}$$

其中 $A(x)$ 与 Δx 无关, 而 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x **可微**, 并称 $A(x)\Delta x$ 是 $f(x)$ 在点 x 的**微分**, 记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 即

$$\mathrm{d}f(x) = A(x)\Delta x.$$

从定义 2.2.1 我们知道, 若 $A(x)$ 在点 x 处不为零, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x)\Delta x + o(\Delta x)}{A(x)\Delta x} = 1,$$

定理 2.2.1 (函数可微的充要条件) 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是在点 x 处存在导数 $f'(x)$. 当这一条件满足时, 成立公式

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x. \tag{2.2.2}$$

定理 2.2.3 (一阶微分形式的不变性) 设 $y=f(u)$, 则无论 u 是自变量还是中间变量 $u=\varphi(x)$, 其微分公式都保持同一形式:

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u. \tag{2.2.4}$$

即, 函数的微分等于该函数对某变量的导数乘以该变量的微分. 这一性质称为**一阶微分形式的不变性**.

微分等到了高阶和多元情况下才开始变得有趣，但不考，暂时不提。

定理 2.3.1 (费马 (Fermat*) 引理) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某个邻域 $U=N_\delta(x_0)$ 内有定义, 且在 x_0 可导, 如果对任意的 $x\in U$, 有

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad (\text{或} f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则 $f'(x_0)=0$.

定理 2.3.2 (洛尔 (Rolle†) 定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件:

1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
2) 在开区间 (a,b) 内可导;
3) $f(a)=f(b)$,

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

定理 2.3.3 (拉格朗日 (Lagrange‡) 中值定理) 若函数 $f(x)$ 满足条件:

1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

记 $x_0 = a,\ x_0 + \Delta x = b$, 于是在 $b > a$ 时 $\Delta x > 0$, 在 $b < a$ 时 $\Delta x < 0$. 而 ξ 在 a 和 b 之间, 因而存在 $\theta\ (0 < \theta < 1)$, 使 $\xi = a + \theta\Delta x$, 由此拉格朗日中值公式可写成另一常用的形式

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x \quad (0 < \theta < 1). \tag{2.3.3}$$

该形式常称为拉格朗日中值公式的**有限增量形式**. 拉格朗日中值定理也因此被称为**有限增量定理**.

定理 2.3.6 (柯西 (Cauchy) 中值定理) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件:

1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

2) 在开区间 (a,b) 内可导;

3) 在区间 (a,b) 内 $g'(x)$ 处处不为零,

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

定理 2.3.7 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件:

$x \to +\infty$ 时同理

1) $x \to a$ 时 $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$; ∞ 同理

2) 在点 a 的某去心邻域内可导, 即 $f'(x),\ g'(x)$ 存在, 且 $g'(x) \neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (有限或 ∞).

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

当 $x \to a$ (或 $x \to \infty$) 时, 如果 $f(x) \to 0,\ g(x) \to \infty$, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 成为不定型, 记为 $0\cdot\infty$; 如果 $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty$, 或 $f(x) \to -\infty,\ g(x) \to -\infty$, 则 $f(x) - g(x)$ 也都是不定型, 记为 $\infty - \infty$.

对于不定型 $0\cdot\infty$, 可以写

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

化成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的不定型, 从而可以利用洛必达法则.

对于 $\infty - \infty$ 的不定型, 可以写

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}},$$

化为 $\dfrac{0}{0}$ 的不定型, 但在实际做题时, 往往不必如此麻烦, 可以从题目本身发现较简单的解法.

对于不定型呈 0^0 、∞^0 或 1^∞ 的函数 $f(x)^{g(x)}$, 可设

$$y = f(x)^{g(x)},$$

定理 2.3.11 (泰勒 (Taylor¶) 公式 I) 设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的邻域 U 内有直到 n 阶导数, 则当 $x \to x_0$ 时,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right). \tag{2.3.7}$$

我们称式 (2.3.7) 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的带皮亚诺 (Peano‖) 余项的 n **阶泰勒公式**或**泰勒展开式**, 称 $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ 为**皮亚诺余项**. 其中 $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, 在本段下面的叙述中该说明仍然有效. 下面的定理给出了余项 $R_n(x)$ 的一个具体表达式.

定理 2.3.12 (泰勒 (Taylor) 公式 II) 设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的邻域 U 内有直到 $(n+1)$ 阶导数, 则 f 在 U 内的任意点 x 成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \tag{2.3.8}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{2.3.9}$$

而 ξ 在 x 和 x_0 之间.

我们称式 (2.3.8) 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的带拉格朗日余项的 n **阶泰勒公式**, 称式 (2.3.9) 所示的 $R_n(x)$ 为**拉格朗日余项**.

在泰勒公式中, 如果 $x_0 = 0$, 则 ξ 在 0 和 x 之间, 于是存在 θ, $0 < \theta < 1$ 使 $\xi = \theta x$, 此时, 泰勒公式的形式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \tag{2.3.10}$$

或

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^n\right). \tag{2.3.11}$$

这两个公式分别称为带拉格朗日余项与皮亚诺余项的 n **阶麦克劳林**(Maclaurin**) 公式. 式 (2.3.11) 亦称为 $f(x)$ 关于 x 的 n **阶有限展开式**.

下面我们利用式 (2.3.10) 给出几个常用初等函数带拉格朗日余项的麦克劳林公式 ($0 < \theta < 1$), 带皮亚诺余项的展开式可类似给出.

(1) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

(2) $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{m-1}\dfrac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \dfrac{\sin\left(\theta x + \dfrac{2m+1}{2}\pi\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$.

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m\dfrac{1}{(2m)!}x^{2m} + \dfrac{\cos(\theta x + (m+1)\pi)}{[2(m+1)]!}x^{2(m+1)}$.

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$.

$$(5)\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

(注意, $\alpha=\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$时容易忘记此展开)

(6) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ / $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$

(7) $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$

(8) $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$ / $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \cdots$

(9) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

常用结论：

$$tanx - sinx \sim \frac{1}{2}x^3$$

$$x - sinx \sim \frac{1}{6}x^3 \qquad x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$arcsinx - x \sim \frac{1}{6}x^3 \qquad e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$tanx - x \sim \frac{1}{3}x^3 \qquad 1 - \cos^a x \sim \frac{ax^2}{2}$$

$$x - arctanx \sim \frac{1}{3}x^3 \qquad f(x)^{g(x)} - 1 \sim g(x)\left[f(x) - 1\right] \qquad \left(\quad f(x) \to 1 \quad f(x)^{g(x)} \to 1 \right)$$

函数可导性概念分级（从弱到强）

围绕点 x_0 和阶数 n，可导性概念逐级增强：

1. 在 x_0 处 n 阶可导
   - 核心：仅保证在 这一点 存在 $f^{(n)}(x_0)$。
   - 应用：皮亚诺(Peano)型泰勒公式的最低要求。
2. 在 x_0 的邻域内存在 n 阶导数
   - 核心：$f^{(n)}(x)$ 作为函数在 一个区间 上有定义。
   - 不保证：该导数的连续性或可导性。
3. 在 x_0 的邻域内 n 阶导数连续（C^n）
   - 核心：在(2)的基础上，$f^{(n)}(x)$ 是 连续 函数。
   - 应用：保证函数在该邻域内具有更好的光滑性。
4. 在 x_0 的邻域内 $n+1$ 阶可导
   - 核心：在 一个区间 上 $f^{(n+1)}(x)$ 存在。
   - 蕴含：此条件 蕴含 (3) 和 (2)。
   - 应用：拉格朗日(Lagrange)型泰勒公式（展开到 n 阶）的 必要条件。因为其余项显式包含 $f^{(n+1)}(\xi)$。

逻辑关系与泰勒公式适用性

逻辑关系：(4) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (1)
（反向推导均不成立）

泰勒公式要求：

- 皮亚诺余项：仅需条件 **(1)**。
- 拉格朗日余项：需要条件 **(4)**。

1. 在 x=0 处 3 阶可导，但不满足 2, 3, 4

函数：

$$f(x) = \begin{cases} x^4\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

说明：$f'''(0)$ 存在。但对于任意包含 0 的邻域，在 $x \neq 0$ 的点，$f'''(x)$ 不存在极限，导致 $f'''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内不存在。

2. 在 x=0 的邻域内存在 3 阶导数，但不满足 3, 4

函数：

$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

说明：$f'''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内存在（对于 $x \neq 0$ 的点，直接求导；对于 $x=0$ 点，利用定义计算）。然而，$f'''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

3. 在 x=0 的邻域内 3 阶导数连续，但不满足 4

函数：

$$f(x) = \begin{cases} x^5\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

说明：$f'''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内存在且连续。但 $f^{(4)}(0)$ 不存在。

4. 在 x=0 的邻域内 4 阶可导

函数：$f(x) = x^5$

说明：$f^{(4)}(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内存在（事实上 $f^{(4)}(x) = 120x$）。