



微积分第二次自救

定理 2.4.1 (函数严格单调的充分条件) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导. 如果在区间 I 内的每一点成立 $f'(x) > 0$ (或 < 0), 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加 (或减少).

证明 对区间 I 内的任何两点 x_1, x_2 ($x_2 > x_1$), 由可导一定连续知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上连续、可导, 利用拉格朗日中值定理, 得到

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$. 所以, 当在 I 上 $f'(x) > 0$, 由上式可知 $f(x_2) > f(x_1)$, 这表示 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加. 同样可证, 若在 I 上 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 严格单调减少. \square

定理 2.4.4 (极值判别法 I) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 U 内连续, 在 $\overset{\circ}{N}_\delta(x_0)$ 内可导, 则在 x_0 的左、右邻域上, 当导数符号不改变时, x_0 不是极值点; 当导数符号改变时, x_0 是极值点, 特别有

- (1) 若 $(x - x_0)f'(x) > 0, \forall x \in \overset{\circ}{N}_\delta(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值;
- (2) 若 $(x - x_0)f'(x) < 0, \forall x \in \overset{\circ}{N}_\delta(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

定理 2.4.5 (极值判别法 II) 设 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则当 $f''(x_0) < 0$ 时 $f(x_0)$ 是极大值, $f''(x_0) > 0$ 时 $f(x_0)$ 是极小值. 直观记忆:  

设 P 为某曲线段上任意一点, 若该曲线段除 P 点外均位于过 P 点切线的上方 (或下方), 则称该曲线为上凹的 (或下凹的). 有时把上凹称为凹的, 下凹称为凸的. 例如图 2.8 中曲线段 S_1 为上凹的, S_2 为下凹的.

定义 2.4.2 (拐点) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 若存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上的凹向性相反, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数曲线的拐点.

若 P 点为拐点, 且过 P 点的切线存在, 则该切线必穿过曲线 (见图 2.10).

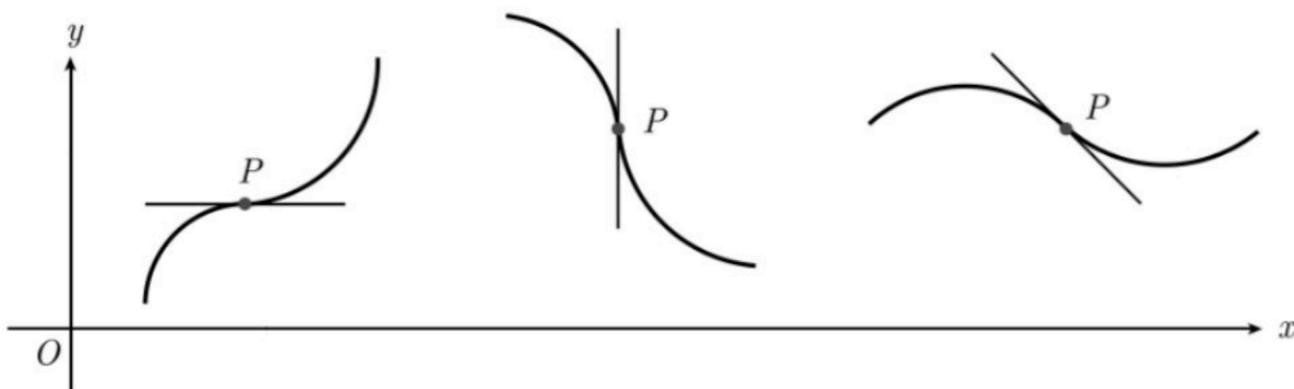


图 2.10

定理 2.4.7 (拐点的判定) 设 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在. 则当 $f''(x)$ 在 x_0 左、右邻域内异号时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点; 当 $f''(x)$ 在 x_0 左、右邻域内同号时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

Note: $f''(x_0)$ 不存在的拐点不必然在图像上体现明显区别. 一般情况下是一阶导数不存在 (竖切线), 所以图像很明显地“不光滑”, 但同时也存在“-阶导存在, 二阶导不存在”的拐点.

拐点的核心特征是：函数在 x_0 点两侧的凹凸性必须变号（即 $f''(x)$ 变号）。

类型一：光滑平稳型

- 关键条件： $f''(x_0) = 0$ （同时 $f'(x_0)$ 存在）。
- 切线特征：在 x_0 处有有限斜率的切线（可以是水平的，也可以是倾斜的）。
- 图像特征：图像最为光滑平稳。曲率在 x_0 处是连续变化的，凹凸性的过渡非常自然，没有突然的改变。
- 经典例子： $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处，有一条水平切线。

类型二：光滑急转型

- 关键条件： $f'(x_0)$ 存在，但 $f''(x_0)$ 不存在。
- 切线特征：在 x_0 处同样有有限斜率的切线（水平或倾斜），因此曲线本身是光滑连接的。
- 图像特征：图像是光滑的，但曲率的变化率（即 $f''(x)$ ）在 x_0 处发生了跳跃或突变。这使得凹凸性的转变看起来比第一种类型更“急促”或“突然”。
- 经典例子： $f(x) = x^{5/3}$ 在 $x = 0$ 处，有一条水平切线。

类型三：尖锐/垂直型

- 关键条件： $f'(x_0)$ 不存在（通常趋于无穷大）， $f''(x_0)$ 也不存在。
- 切线特征：在 x_0 处有垂直切线（即 $f'(x_0) = \infty$ ）。
- 图像特征：图像不再光滑，在 x_0 处表现出尖锐或被垂直拉伸的视觉特征。这是三种类型中视觉效果最强烈的一种，因为曲线的光滑性在此处被破坏。
- 经典例子： $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 处，有一条垂直切线。

各类型关键点区分

- 对于 $f''(x_0) = 0$ （类型一）：
 - 这是最标准的拐点，图像也最平滑，所有导数在这一点通常都是连续的。
- 对于 $f'(x_0)$ 存在，但 $f''(x_0)$ 不存在（类型二）：
 - 图像光滑，因为一阶导数存在保证了没有尖角或垂直切线。
 - 但曲率变化率不连续，凹凸性的转变比类型一要“急”一些。
- 对于 $f'(x_0)$ 不存在，且 $f''(x_0)$ 不存在（类型三）：
 - 图像不光滑，在拐点处通常有垂直切线，呈现出尖锐的特征。
 - 这是最具“视觉冲击力”的一种拐点。

(1) 铅直渐近线 当 x 从单侧趋于 x_0 时， $y = f(x) \rightarrow +\infty$ ，或 $-\infty$ ，则直线 $x = x_0$ 是曲线 C 的渐近线。由于这条直线与 Ox 轴垂直，故称为铅直渐近线（见图 2.11）。

(2) 水平渐近线 当 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 时， $f(x) \rightarrow c$ ，则直线 $y = c$ 是曲线 C 的渐近线。由于这条直线平行于 Ox 轴，故称为水平渐近线（见图 2.12）。

(3) 斜渐近线 曲线 C 有渐近线 $y = ax + b$ 。若 $a \neq 0$ ，称之为斜渐近线（图 2.13）。

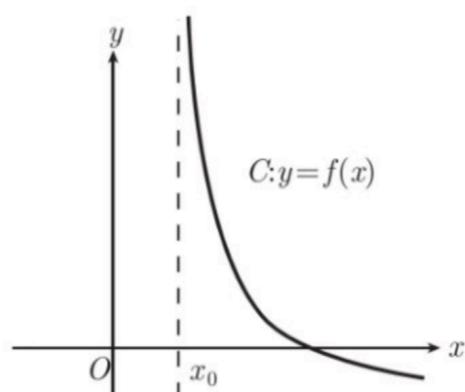


图 2.11

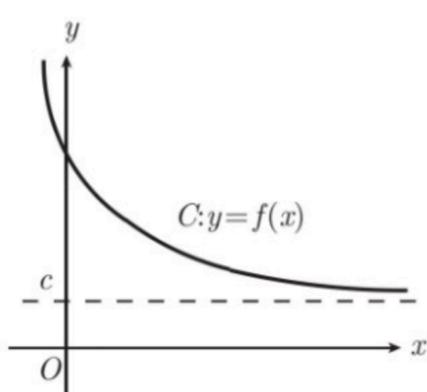


图 2.12

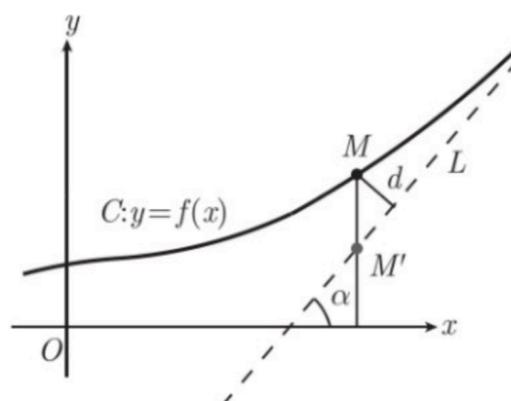


图 2.13

关于渐近线的求法，铅直和水平渐近线是十分显然的。斜渐近线的求法可推导如下：

为确定起见考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形，设非铅直的渐近线 L 的方程为 $y = ax + b$ ，它与 Ox 轴的夹角为 α （见图 2.13）。过曲线 C 上的点 M 作 Ox 轴的垂线交 L 于 M' ，则 $d = |MM'| \cos \alpha$ ，而 $\cos \alpha \neq 0$ 为常数，可见 $d \rightarrow 0$ 与 $|MM'| \rightarrow 0$ 是等价的。而 $|MM'| \rightarrow 0$ 即 M 与 M' 的纵坐标之差趋于 0，即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0, \quad (2.4.3)$$

由此得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a. \quad (2.4.4)$$

由式 (2.4.4) 求得 a 后，再由式 (2.4.3) 又得

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax). \quad (2.4.5)$$

(1) 确定函数的定义域, 并考察其对称性及周期性.

对称性可通过讨论函数的奇偶性来给出. 显然, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点对称. 因此, 对这种函数, 只要作出 $x \geq 0$ 部分的图形, 另一半图形利用对称性画出.

又若 f 是以 T 为周期的周期函数, 则只需作出一个周期 $[0, T]$ 内的图形, 然后作周期延拓即得全图.

(2) 利用函数的一阶、二阶导数讨论函数的单调性, 求出极值点, 算出极值; 讨论函数的凹向性, 求出拐点.

首先求出 $f'(x), f''(x)$, 找出它们等于零和不存在的点. 用这些点将定义域依 x 增加顺序把定义域分成几个区间, 定出这些区间上 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的正、负号, 用以确定函数的单调区间、极值点、凹凸区间与拐点, 并将这些结果列在一表格内.

(3) 确定曲线的渐近线.

(4) 根据需要与可能, 求出某些特殊点 (例如与坐标轴的交点) 的坐标.

(5) 把以上结果画在坐标平面上.

画图时先画出渐近线, 再画出极值点、拐点与特殊点, 然后按表中所列的单调性及凹向性将这些点之间的曲线段依次描出, 即得曲线的图形.

3.1.2 积分基本公式

参照导数公式表, 我们有下列基本积分公式表:

$$(1) \int 0 dx = C;$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \neq -1;$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1), \quad \text{当 } a = e \text{ 时, } \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \text{ 或 } -\arccos x + C;$$

$$(10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \text{ 或 } -\operatorname{arccot} x + C;$$

$$(11) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C;$$

$$(12) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C;$$

$$(13) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$(14) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

* 若 $x < 0$, 则 $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C.$

一、换元积分法

利用积分的运算性质与基本积分表, 所能解决的不定积分类型是十分有限的. 因此有必要寻求其他方法解决更广一类函数的不定积分问题. 这里介绍的换元积分法是最基本、最重要的一种方法. 它是通过适当的变量代换, 将所求积分化成基本积分表中的积分.

设函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(v)$ 符合复合函数条件. 又设 $f(u)$ 存在原函数, $\varphi(v)$ 可导. 因 $du = \varphi'(v) dv$, 由一阶微分形式不变性有

$$f(u) du = f(\varphi(v)) \varphi'(v) dv.$$

再由 3.1.1 节性质 3), 我们得到

$$\int f(u) du = \int f(\varphi(v)) \varphi'(v) dv. \quad (3.1.3)$$

1. 若式 (3.1.3) 左端容易计算, 我们常将右端通过变量代换 $u = \varphi(v)$ 化成左端计算. 设

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

将 $u = \varphi(v)$ 代入上式右端便求得函数 $f(\varphi(v)) \varphi'(v)$ 的不定积分为 $F(\varphi(v)) + C$.

实际计算时这样书写更为简洁:

$$\int f(\varphi(v)) \varphi'(v) dv = \int f(\varphi(v)) d\varphi(v) = F(\varphi(v)) + C.$$

这个方法通常称为凑微分法.

2. 若式 (3.1.3) 右端容易计算, 我们常将左端通过变量代换 $u = \varphi(v)$ 化成右端计算. 这里还要假定 $u = \varphi(v)$ 存在反函数 $v = \varphi^{-1}(u)$. 若 $G(v)$ 为函数 $f(\varphi(v)) \varphi'(v)$ 的原函数, 则

$$\int f(u) du = \int f(\varphi(v)) \varphi'(v) dv = G(v) + C = G(\varphi^{-1}(u)) + C.$$

这个方法通常称为第二换元法.

二、分部积分法

除换元积分法之外, 另一种重要的求不定积分的方法是分部积分法.

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 均为某区间上 x 的可导函数, 且导数连续. 由函数乘积的微分公式

$$d(uv) = u dv + v du$$

知

$$u dv = d(uv) - v du,$$

两边积分即得

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3.1.4)$$

一、有理函数的积分

我们把两个实系数多项式的商 (分母不为零多项式) 所表示的函数称为有理函数, 除了恒等于零的函数外, 有理函数具有下述形式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m},$$

其中 n, m 均为非负整数, a_0, a_1, \cdots, a_n , 及 b_0, b_1, \cdots, b_m 都是实常数, 且 $a_n, b_m \neq 0$.

当 $n < m$ 时, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理真分式 (简称真分式); 当 $n \geq m$ 时, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理假分式 (简

称假分式). 当 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为假分式时, 可以用多项式除法, 将其化成一个多项式与真分式之和的

形式. 因此, 有理分式的积分可归结为求真分式的积分问题.

定义 3.1.3 (最简分式) 称形如

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad k = 1, 2, \cdots \quad (3.1.5)$$

与

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q < 0, \quad k = 1, 2, \cdots \quad (3.1.6)$$

的有理分式为最简分式 (其中 A, M, N, a, p, q 为实常数).

定理 3.1.2 设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为实系数有理真分式, 若 $Q(x)$ 分解成式 (3.1.7) 的形式, 则

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \cdots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \cdots \\ & + \frac{C_hx+D_h}{(x^2+px+q)^h} + \cdots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s} + \cdots + \frac{M_tx+N_t}{(x^2+rx+s)^t}, \end{aligned}$$

(其中 $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_l, C_1, \cdots, C_h, D_1, \cdots, D_h, M_1, \cdots, M_t, N_1, \cdots, N_t$ 等均为实常数).

由定理 3.1.2 知, 实系数有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 必可分解为有限多个最简分式之和. 若 $Q(x)$ 分解成式 (3.1.7) 的形式, 则其最简分式的形式见下表

分母 $Q(x)$ 中含有的因式	最简分式中含有的对应项
单因式 $(x-\alpha)$	$\frac{A}{x-\alpha}$
k -重因式 $(x-\alpha)^k$	$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$
单重二次式 x^2+px+q	$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
k -重二次式 $(x^2+px+q)^k$	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$

因此, 有理真分式的积分可以归结为下述两类的积分问题:

$$(I) \int \frac{1}{(x-a)^k} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(II) \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx, \quad p^2 - 4q < 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

对于 (I) 我们有

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & k = 1, \\ \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, & k > 1. \end{cases}$$

对于 (II) 有

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + p) + \left(N - \frac{M}{2}p\right)}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^k} + \left(N - \frac{M}{2}p\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} \\ &= \frac{M}{2} I_k^1 + \left(N - \frac{M}{2}p\right) I_k^2 \end{aligned}$$

下面分别讨论求解积分 I_k^1 和 I_k^2 .

$$I_k^1 = \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^k} = \begin{cases} \ln(x^2 + px + q) + C, & k = 1, \\ \frac{-1}{(k-1)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C, & k > 1. \end{cases}$$

对 I_k^2 , 令 $x + \frac{p}{2} = t, a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, 则 $dx = dt, x^2 + px + q = t^2 + a^2$. 于是

$$I_k^2 = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

由例 3.1.21 知

$$I_1^2 = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + C$$

以及递推公式

$$I_{k+1}^2 = \frac{1}{2ka^2} \left[\frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + (2k-1)I_k^2 \right] \quad (k = 1, 2, \dots),$$

其中 $t = x + \frac{p}{2}, a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} > 0$.

至此, 我们解决了对第 (I)、(II) 两类积分的求解, 这样就解决了对有理真分式积分问题, 进而也给出了求解有理函数的积分方法.

二、三角函数有理式的积分

我们把三角函数 $\sin x, \cos x$ 及常数经过有限次加减乘除四则运算得到的一类函数称为 **三角函数有理式**, 常用 $R(\sin x, \cos x)$ 表示, 其中 R 表示有理函数. 因 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 等都可用 $\sin x, \cos x$ 的商或倒数表示, 它们都是三角函数的有理式. 由于

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}},$$

所以, 令 $t = \tan \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

又因 $x = 2 \arctan t$, 得 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. 于是

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

上式右端是 t 的有理函数的积分. 前面我们已经解决了有理函数的积分问题, 因此三角函数有理式的积分也可得到解决.

定义 3.2.1 (定积分的定义) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上定义, 用任意分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$. 第 i 个小区间长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (3.2.2)$$

式 (3.2.2) 称为黎曼和. 命 $\lambda = \max\{\Delta x_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为区间 $[a, b]$ 分割的模. 无论区间 $[a, b]$ 怎样的分割及 ξ_i 怎样的取法, 当 $\lambda \rightarrow 0$ (必有 $n \rightarrow \infty$) 时, 若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上黎曼*可积, 简称可积, 称 A 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼积分, 简称为定积分(或积分), 记成

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.2.3)$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数, $f(x) dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, a 与 b 分别称为积分下限与上限, 区间 $[a, b]$ 称为积分区间. 在定义中, 假定了 $a < b$.

定理 3.2.1 (函数可积必要条件) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

常见的几类可积函数:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数在 $[a, b]$ 上可积.
- (2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调且有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.
- (3) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限多个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

5) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

注 (i) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 但 $f(x) \not\equiv 0$, 则可得到严格不等式

$$\int_a^b f(x) dx > 0. \text{ 证明见定理 3.2.2.}$$

(ii) 因 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a, b]$, 由性质 5) 有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. *$$

6) 设 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 则

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M. \quad (3.2.4)$$

证明 因 $m \leq f(x) \leq M$, 由性质 1)、2) 及 5) 可得

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

上式除以 $(b-a)$ 即得 6). □

不难看出当 $b < a$ 时, 式 (3.2.4) 也成立.

定理 3.2.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

的充分必要条件是存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) > 0$.

定理 3.2.3 (积分中值定理) 设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (3.2.5)$$

推论 3.2.4 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (3.2.8)$$

式 (3.2.8) 的几何意义如下 (见图 3.3): 在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得以 $[a, b]$ 为底, $y = f(x)$ 为曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x) dx$ 等于以 $[a, b]$ 为底, $f(\xi)$ 为高的矩形面积 (见图中阴影部分).

当 $f(x)$ 可积时, 我们称 $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值. 推论 3.2.4 是说, 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \bar{y}$.

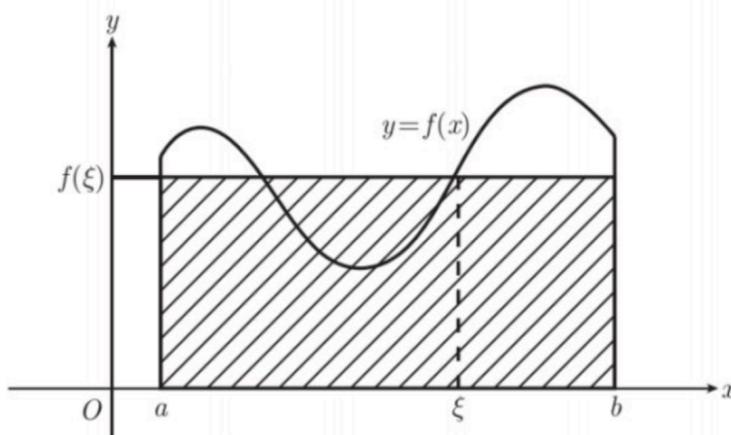


图 3.3

3.2.2 牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式

设 I 为任一闭区间, 函数 $f(x)$ 在 I 上可积, $c \in I$, 则

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t) dt^* \quad (3.2.9)$$

为定义在区间 I 上的函数, 称为变上限的定积分或称为定积分上限的函数. 在图 3.4 中, 当 $x > c$ 时, 其几何意义为区间 $[c, x]$ 上方曲边梯形的面积 (见阴影部分). 当 x 移动时, 该面积也发生变化.

定理 3.2.5 (原函数存在定理) 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上连续, 则由式 (3.2.9) 定义的函数 $\Phi(x)$ 在 I 上可导, 且

$$\Phi'(x) = f(x). \quad (3.2.11)$$

该定理指出当被积函数为连续函数时, 变上限的定积分关于上限的导数恰等于被积函数在该点的值. 图 3.5 直观地说明了这一点. 图中阴影部分面积等于函数增量 $\Delta\Phi(x)$. 式 (3.2.10) 指出函数增量与自变量增量之比等于 $f(\xi)$, 即等于图 3.5 中矩形的高. 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该矩形缩成一条线段, 其高的极限恰等于 $f(x)$.

定理 3.2.5 同时也证明了连续函数的原函数或不定积分必定存在. 由式 (3.2.9) 给出的变上限定积分就是它的一个原函数. 故定理 3.2.5 也称为微积分学第一基本定理.

如果某区间 I 上, 函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x), \psi(x)$ 在某区间上可导, 且其值域包含在 I 之内, 由复合函数求导法则及式 (3.2.11), 我们有

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \varphi'(x) - f(\psi(x)) \psi'(x). \quad (3.2.12)$$

事实上, 命 $u = \varphi(x), v = \psi(x)$. 任取 $c \in I$, 由定积分性质 4), 复合函数求导法则及定理 3.2.5 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left[\int_{\psi(x)}^c f(t) dt + \int_c^{\varphi(x)} f(t) dt \right] \\ &= -\frac{d}{dx} \int_c^{\psi(x)} f(t) dt + \frac{d}{dx} \int_c^{\varphi(x)} f(t) dt \\ &= -\frac{d}{dv} \left[\int_c^v f(t) dt \right] \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{d}{du} \left[\int_c^u f(t) dt \right] \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -f(v) \psi'(x) + f(u) \varphi'(x) \\ &= f(\varphi(x)) \varphi'(x) - f(\psi(x)) \psi'(x). \end{aligned}$$



记忆方式 (直观推导):

- 第一部分: 上限变动贡献
如果只有上限 $b(x)$ 变动, 而 f 与 x 无关且下限固定, 则
$$\frac{d}{dx} \int_c^{b(x)} f(t) dt = f(b(x)) \cdot b'(x).$$
- 第二部分: 下限变动贡献
如果只有下限 $a(x)$ 变动, 则
$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^c f(t) dt = -f(a(x)) \cdot a'(x).$$
- 第三部分: 被积函数显式依赖于 x
如果上下限固定, 但 $f = f(x, t)$, 则
$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Note: $\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$

推导: 设 $u = a(x), v = b(x), G(x, u, v) = \int_u^v f(x, t) dt, F(x) = G(x, a(x), b(x))$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\int f(x, t) dt \right]_{t=v} = f(x, v)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 - \frac{\partial}{\partial u} \left[\int f(x, t) dt \right]_{t=u} = -f(x, u)$$

$$\therefore dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial v} dv + \frac{\partial G}{\partial u} du \quad (\text{全微分})$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dF}{dx} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x)$$

定理 3.2.6 (牛顿-莱布尼兹定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 任一原函数, 则

微分学第一基本定理

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.2.13)$$

定理 3.2.7 (定积分换元法) 设

- 1) 函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 或 $[\beta, \alpha]$ 上存在连续的导数;
- 2) 函数 $f(x)$ 在 $\varphi(t)$ 的值域上连续;
- 3) $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$,

则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.2.15)$$

定理 3.2.8 (定积分分部积分法) 设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在连续的导数, 则

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx, \quad (3.2.16)$$

或

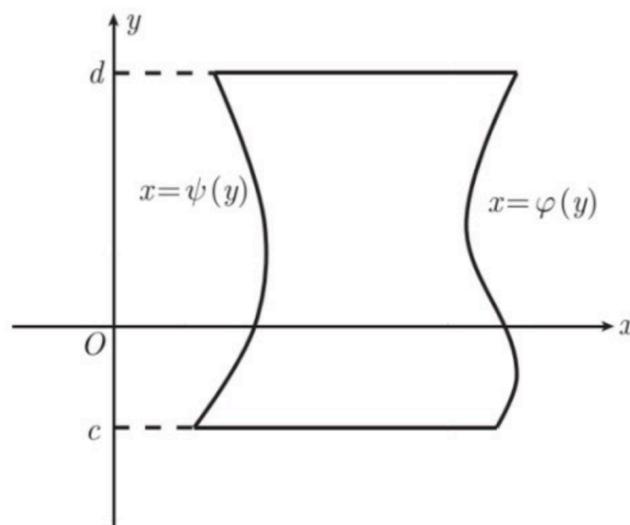
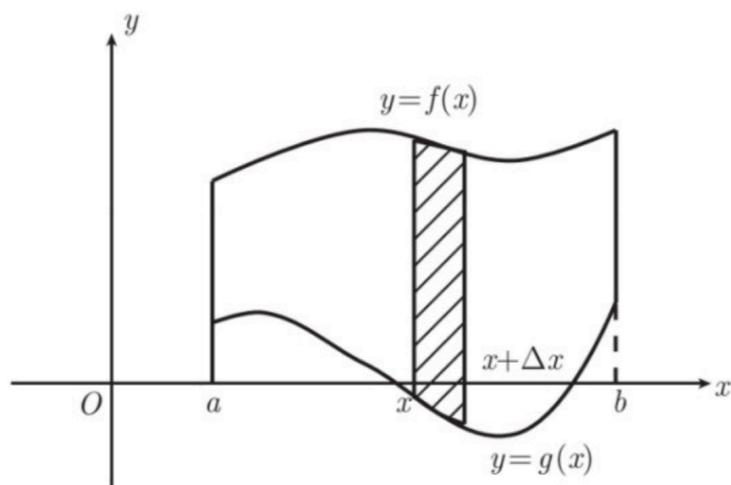
$$\int_a^b vu' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv' dx.$$

一、平面图形的面积

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (3.3.3)$$

若某平面图形如图 3.8 所示, 这里 $\varphi(y) \geq \psi(y)$, 则类似式 (3.3.3) 的推导可知面积为

$$A = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y)) dy. \quad (3.3.4)$$



2. 极坐标系中平面图形的面积

设有极坐标系中曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 与矢径 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形, 这里 $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ (见图 3.11). 我们来求该图形的面积 A .

从几何意义上易见面积微元等于以 $d\theta$ 为圆心角, $\rho(\theta)$ 为半径的小扇形的面积

$$\Delta A \approx dA = \frac{1}{2} \rho^2(\theta) d\theta,$$

见图 3.11 中阴影部分.

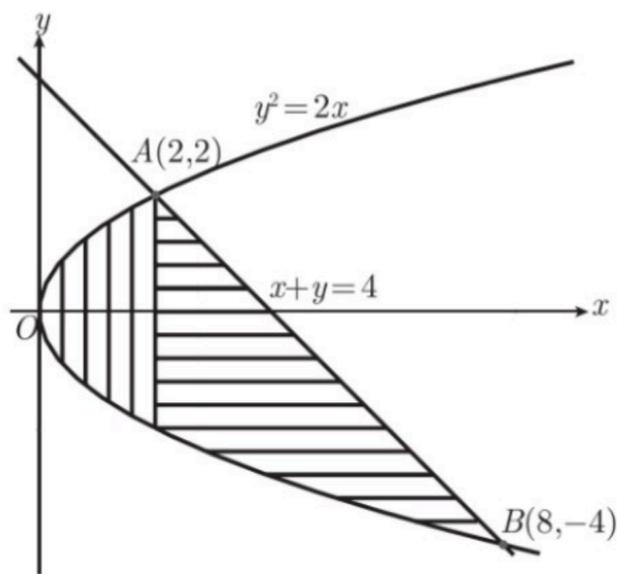


图 3.10

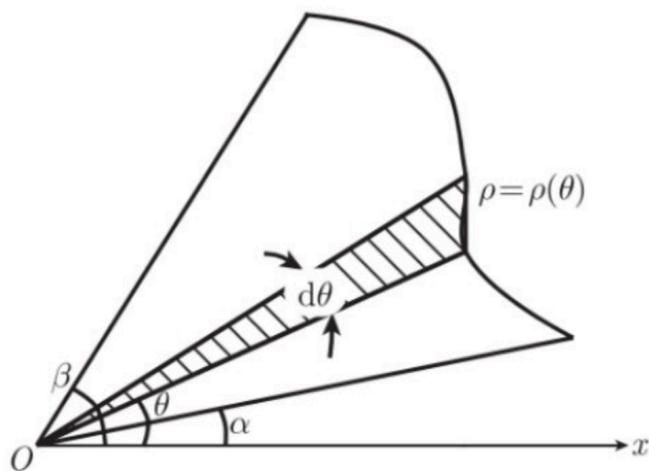


图 3.11

于是

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta. \quad (3.3.5)$$

若某平面图形是由曲线 $\rho = \rho_1(\theta), \rho = \rho_2(\theta)$ 及矢径 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围 (见图 3.13), 这里 $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta), 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, 则由式 (3.3.5) 可得该平面图形面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)) d\theta.$$

二、已知横截面面积的立体体积

设有一立体, 若它与某个方向 l (可取作 x 轴) 垂直的横截面面积可以求出, 设为 $A(x), x \in [a, b]$ 且 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上分段连续, 则立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (3.3.6)$$

(1) 设立体是由平面图形 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 绕 x 轴旋转一周得到, 如图 3.15 所示, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 x 点处的横截面是以 $f(x)$ 为半径的圆, 故 $A(x) = \pi[f(x)]^2$, 代入式 (3.3.6) 即可得旋转体体积为

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (3.3.7)$$

同理可得平面图形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \phi(y), c \leq y \leq d\}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体 (见图 3.16) 体积为

$$V_y = \pi \int_c^d [\phi(y)]^2 dy. \quad (3.3.8)$$

(2) 设立体是由平面图形

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

绕 y 轴旋转一周得到 (图 3.17). 在任意小区间 $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$ 上, 体积 $V([x, x + \Delta x])$ 是一个厚度为 Δx 的薄圆筒 (在图 3.17 中用阴影线表示), 其近似值为

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x,$$

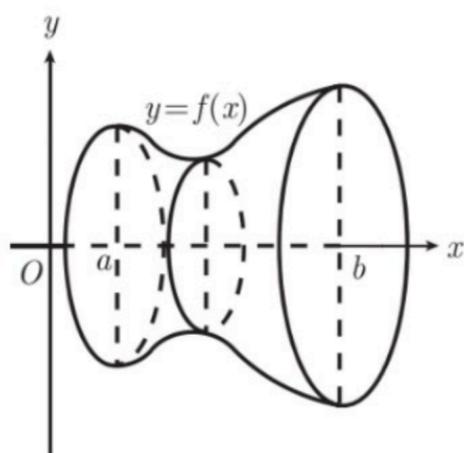


图 3.15

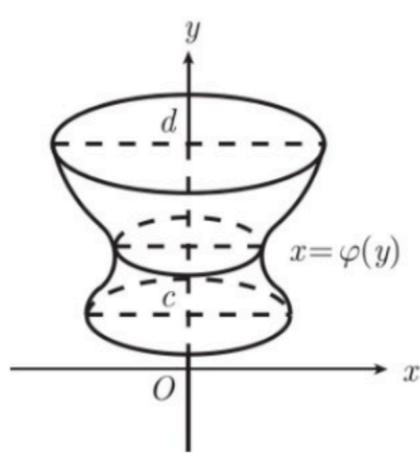


图 3.16

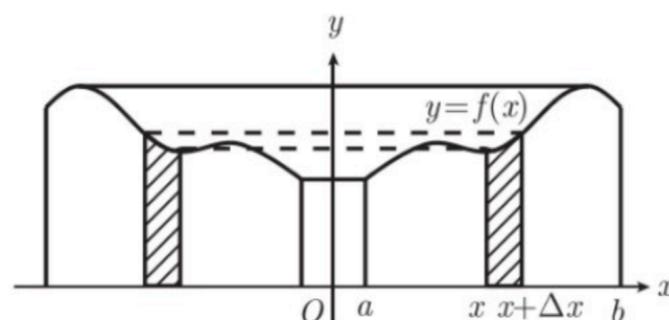


图 3.17

于是得旋转体体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (3.3.9)$$

定理 3.3.1 设曲线 \widehat{AB} 的方程由式 (3.3.10) 给出, 则当导数 $f'(x)$ 连续时, \widehat{AB} 为可求长的, 其长度为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3.3.11)$$

若曲线 \widehat{AB} 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (3.3.12)$$

给出, 这里函数 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导, 且 $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. 由式 (3.3.11), 令 $x = \varphi(t)$, 应用定积分换元公式, 我们有

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} |\varphi'(t)| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (3.3.13)$$

若曲线 \widehat{AB} 由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad (3.3.14)$$

给出, 这里 $\rho(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在连续的导数, 则 \widehat{AB} 的弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta. \quad (3.3.15)$$

事实上, 我们将 \widehat{AB} 的方程写成以极角 θ 为参数的参数方程

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

于是

$$x_\theta'^2 + y_\theta'^2 = [\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta]^2 + [\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta]^2 = \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta).$$

于是有

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad \text{同理有参数方程及极坐标的弧微分}$$

故

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

上式称作为当曲线方程由式 (3.3.10) 表示下的弧微分.

注 凡是经变换能化为下列三种类型之一的积分都称为椭圆积分:

第一类椭圆积分

$$F(k, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}};$$

第二类椭圆积分

$$F(k, \theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta;$$

第三类椭圆积分

$$G(k, \theta, h) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + h \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

其中 $0 < k < 1$, h 是常数 (可以是复数).

$\Delta A[x, x + \Delta x] \approx \pi[f(x) + f(x + \Delta x)]\Delta s \approx 2\pi f(x)\Delta s \approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx$,
再在 $[a, b]$ 上积分即有旋转面的面积为

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (3.3.17)$$

注意到, 由式 (3.3.17), 易见旋转面面积微元为

$$dA_x = 2\pi f(x) ds, \quad \text{记作 } dA_x = 2\pi y ds.$$

因此, 当曲线 \widehat{AB} 分别由参数方程 (3.3.12) 和极坐标方程 (3.3.14) 给出时, 我们有

$$A_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad (3.3.18)$$

以及

$$A_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta) \sin \theta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta. \quad (3.3.19)$$

类似地, 曲线 \widehat{AB} 绕 y 轴旋转一周也可得到一个旋转面, 其旋转面面积微元为

$$dA_y = 2\pi x ds,$$

相应旋转面面积为

$$A_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx; \quad (3.3.20)$$

$$A_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt; \quad (3.3.21)$$

$$A_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta) \cos \theta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta. \quad (3.3.22)$$

定义 3.4.1 (无穷区间上的积分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有定义, 若对任意 $b \in (a, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均可积, 则定义无穷区间上的广义积分 (简称广义积分)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

当上式右端极限存在时, 称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 否则称广义积分发散. 称 $+\infty$ 为它的奇点 (或瑕点).

定理 3.4.1 (广义牛顿-莱布尼兹定理) 设函数 $f(x)$ 在所讨论的区间上连续, $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \quad (3.4.1)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty), \quad (3.4.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \quad (3.4.3)$$

这里 $F(+\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$, $F(-\infty) = \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$. 上述三个等式也称为广义牛顿-莱布尼兹公式.

定理 3.4.2 (广义换元积分公式) 设函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 设 $x = +\infty$ 是

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 的唯一奇点, 又设 $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, +\infty)$ 上连续可导, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(+\infty) = +\infty$ (或 $\varphi(+\infty) = a$, $\varphi(\alpha^+) = +\infty$), 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (3.4.4)$$

$$\left(\text{或 } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{+\infty}^{\alpha} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right). \quad (3.4.5)$$

定理 3.4.3 (广义分部积分公式) 设函数 $u(x), v(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上连续可导, x

$= +\infty$ 是广义积分 $\int_a^{+\infty} u(x) dv(x)$ 的唯一奇点, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$ 存在, 则

$$\int_a^{+\infty} u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)u'(x) dx. \quad (3.4.6)$$

证明 任取 $b \in (a, +\infty)$, 在区间 $[a, b]$ 上应用定积分分部积分公式 (3.2.16), 我们有

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx,$$

令 $b \rightarrow +\infty$, 即得式 (3.4.6) 成立. □

定义 3.4.2 (无界函数的积分) 设对任意充分小的正数 ε , 函数 $f(x)$ 在区间 $[a + \varepsilon, b]$ 上均可积. 若 $f(x)$ 在 a 点的右邻域上无界, 则称 a 为 $f(x)$ 的奇点 (或瑕点). 若极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = A$$

存在, 则称无界函数的广义积分 (简称广义积分) $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 记为

$$\int_a^b f(x) dx = A.$$

若极限 A 不存在, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

类似可定义 b 为奇点时的广义积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

若 a 与 b 均为奇点, 取 $c^* \in (a, b)$, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^c f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_c^{b-\eta} f(x) dx.$$

当右端两个广义积分均收敛时, $\int_a^b f(x) dx$ 才收敛.

同无穷区间上的广义积分一样, 我们有下述定理:

定理 3.4.4 (广义牛顿-莱布尼兹定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ (或区间 $[a, b)$) 上连续, a (或 b) 为 $f(x)$ 的奇点. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则当 a 为唯一奇点时,

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+), \quad (3.4.7)$$

这里 $F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$. 当 b 为唯一奇点时,

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a), \quad (3.4.8)$$

这里 $F(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$. 当 a, b 均为奇点时,

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{a^+}^{b^-} = F(b^-) - F(a^+). \quad (3.4.9)$$

上述三个等式也称为广义牛顿-莱布尼兹公式.

定理 3.4.5 (广义换元积分公式) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 设 $x = a$ 是广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的唯一奇点, 又设 $x = \varphi(t)$ 在 $(\alpha, \beta]$ 上连续可导, $\varphi(\alpha^+) = a, \varphi(\beta) = b$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.4.10)$$

对于 $x = b$ 是奇点的广义积分, 同样有与式 (3.4.10) 对应的广义换元积分公式, 在此不再赘述.

定理 3.4.6 (广义分部积分公式) 设函数 $u(x), v(x)$ 在区间 $(a, b]$ (或 $[a, b)$) 上连续可导, $x = a$ (或 $x = b$) 是广义积分 $\int_a^b u(x) dv(x)$ 的唯一奇点, $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x)$ (或 $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$) 存在, 则

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_{a^+}^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx \quad (3.4.11)$$

我们可以定义空间向量 \mathbf{a} 与三个坐标轴 x 轴, y 轴, z 轴的正向的夹角, 分别记为 α, β, γ (见图 4.8), 称为向量 \mathbf{a} 的方向角, 方向角的余弦称为向量的方向余弦, 记为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

同向时取正, 反向时取负. 由图 4.9 可见, $A_1 B_1 = \text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta$, θ 表示向量 \overrightarrow{AB} 与数轴 u 的夹角. 对任意两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 也有类似的结果

$$\text{Prj}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad \text{Prj}_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle.$$

定理 4.1.3 投影的性质:

- (1) $\text{Prj}_u(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Prj}_u \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (2) $\text{Prj}_u(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Prj}_u \mathbf{a} + \text{Prj}_u \mathbf{b}$. (证明留作习题)

例 4.1.3 (定比分点的坐标) 给定空间中的两点 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, 在线段 PQ 上求一点 M , 使得 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MQ}$ (见图 4.10).

由此解得点 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right).$$

定理 4.1.7 向量的向量积的性质:

- (1) $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- (2) 两个非零向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 平行的充分必要条件是: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

定理 4.1.8 向量的向量积的运算法则:

- (1) 反交换律 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;
- (2) 结合律 $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (3) 分配律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

定义 4.1.3 (向量的混合积) 三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 是一个数, 记为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, 即 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \theta$, 其中 θ 是向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 的夹角.

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ 的几何意义是: 表示以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为邻边的平行六面体的体积. 这是因为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 表示以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为邻边的平行四边形的面积, 以此平行四边形为底, 平行六面体的高为 $h = |\mathbf{c}| \cos \theta$ (见图 4.15).

定理 4.1.10 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, 则三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积的坐标表示式为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (4.1.15)$$

定理 4.1.11 向量混合积的性质:

- (1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$;
- (2) 对任意实数 λ, μ , $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c}_1 + \mu \mathbf{c}_2) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2)$;
- (3) 混合积等于零的充分必要条件是有一个向量等于零或者三个向量都平行于同一个平面 (称为共面).

定理 4.2.1 (平面的点法式方程) 若已知平面 Π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, 则平面 Π 的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.2.1)$$

在式 (4.2.1) 中, 令 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, 整理得

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.2.2)$$

(一般式方程)

设空间中不共线的三点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 则过这三点可以确定一个平面, 任意选取平面 Π 上的一点 $M(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ 这三个向量共面, 即此三个向量的混合积为 0. 由混合积的坐标表示式, 得

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2.3)$$

此式称为平面的三点式方程.

容易求得通过三点 $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ 的平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4.2.4)$$

此式称为平面的截距式方程. 式中 a, b, c 全不为 0, 称为平面在三个坐标轴上的截距.

1. 过原点的平面

由于原点在平面内, 所以 $D = 0$, 故其平面方程为

$$Ax + By + Cz = 0.$$

2. 平行于坐标轴的平面

设平面平行于 x 轴, 则平面的法向量与 x 轴上的基向量 i 垂直, 因而 $A = 0$, 故平行于 x 轴的平面方程为

$$By + Cz + D = 0;$$

同理, 平行于 y 轴的平面方程为

$$Ax + Cz + D = 0;$$

平行于 z 轴的平面方程为

$$Ax + By + D = 0.$$

3. 过坐标轴的平面

如果平面通过 x 轴, 当然它也过原点, 由上面的讨论, 则其平面方程为

$$By + Cz = 0;$$

同理, 平面通过 y 轴, 则其平面方程为

$$Ax + Cz = 0;$$

平面通过 z 轴, 则其平面方程为

$$Ax + By = 0.$$

4. 平行于坐标平面的平面

设平面平行于 xOy 平面, 则其法向量平行于 z 轴上的基向量 k , 故此平面方程为

$$Cz + D = 0 (C \neq 0),$$

特别地, xOy 平面的方程为: $z = 0$.

定理 4.2.2 (平面外一点到平面的距离) 已知平面外一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与一平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 则 M_1 到平面 Π 的距离为

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.2.5)$$

4.2.2 直线的方程

要确定空间中的一条直线, 只要给出以下三个条件之一:

- (1) 经过空间中的一点 M_0 , 并且平行于某个已知的非零向量 s ;
- (2) 经过已知空间中的两点 M_1, M_2 ;
- (3) 作为两个平面 Π_1 与 Π_2 的交线.

我们称与一已知直线平行的任一非零向量为该直线的方向向量, 记为 s . 若 $s = (l, m, n)$ 是某直线的方向向量, 则称 l, m, n 为该直线的一组方向数.

一、直线的方程

定理 4.2.3 (直线的点向式方程) 若直线通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且直线的方向向量为 $s = (l, m, n)$, 则此直线的方程为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (4.2.7)$$

由式(4.2.7), 令

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

则通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $s = (l, m, n)$ 的直线方程还可写为

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (4.2.8)$$

这里 t 是参数. 此式称为直线的参数式方程.

特别是直线通过空间中的两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 此时直线的方向向量 $s = \overrightarrow{M_1M_2}$, 即 $s = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, 所以通过两点 M_1, M_2 的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.2.9)$$

此式称为直线的两点式方程.

一条空间直线, 还可看成两个平面 Π_1 与 Π_2 的交线, 因此直线的方程可写为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

这里向量 $n_1 = (A_1, B_1, C_1), n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 不共线. 此式称为直线的一般式方程.

定理 4.2.4 (直线外一点到直线的距离) 设点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 不在直线 $L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 上, 则 M_1 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times s|}{|s|}. \quad (4.2.11)$$

两条直线的夹角可由下式求出:

$$\cos \varphi = |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

两条空间直线不在同一平面内称两直线为**异面直线**. 与两条异面直线都垂直且相交的直线称为两异面直线的**公垂线**. 两条异面直线的公垂线在两条异面直线间的线段长度, 称为两条**异面直线的距离**.

公垂线的方向向量 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$, 而两条异面直线的距离 d 就是向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在 \mathbf{s} 上的投影的绝对值, 即

$$d = |\text{Prj}_{\mathbf{s}} \overrightarrow{M_1 M_2}| = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}. \quad (4.2.13)$$

给定一条直线

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

与一个平面

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

直线 L 的方向向量为 $\mathbf{s} = (l, m, n)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在直线 L 上, 平面 Π 的法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$. 一条直线与一个平面之间的位置关系有且只有以下三种:

- (1) 直线与平面平行 —— 它们没有公共点, 记作 $L // \Pi$;
- (2) 直线与平面相交 —— 它们仅有一个公共点 A , 记作 $L \cap \Pi = \{A\}$;
- (3) 直线在平面内 —— 它们有无数个公共点, 记作 $L \subset \Pi$.

令 $\theta = \langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle$, 我们定义直线 L 与平面 Π 的夹角

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \theta - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

显见, 当 $L // \Pi$ 时, 有

$$L // \Pi \iff \mathbf{s} \perp \mathbf{n} \iff lA + mB + nC = 0.$$

特别是, 当直线 L 与平面 Π 重合时, 除 $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$ 外还要求直线 L 上的点 M_0 在平面 Π 上, 即

$$L \subset \Pi \iff lA + mB + nC = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

当 $L \perp \Pi$ 时, 有

$$L \perp \Pi \iff \mathbf{s} // \mathbf{n} \iff \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

直线 L 与平面 Π 的夹角 φ 可由下式求出:

$$\sin \varphi = |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|lA + mB + nC|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (4.2.14)$$

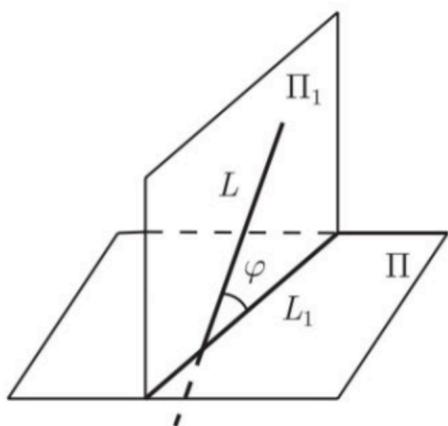


图 4.17

当直线 L 与平面 Π 的夹角 $\varphi = 0$ 时, 直线 L 与平面 Π 平行或直线 L 在平面 Π 内; 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线 L 与平面 Π 垂直. 当 $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}$ 时, 直线 L 与平面 Π 斜交, 这时直线 L 称为平面 Π 的斜线. 当直线 L 与平面 Π 不垂直时, 过直线 L 有且只有一个平面 Π_1 与平面 Π 垂直, 设平面 Π_1 与 Π 的交线为 L_1 , 称直线 L_1 为直线 L 在平面 Π 上的投影, 称平面 Π_1 为投影平面. 斜线 L 与其在平面 Π 上的投影的夹角就是斜线 L 与平面 Π 的夹角 (见图 4.17).

4.2.4 平面束

通过一条定直线 L 的所有平面的集合称为平面束. 设直线 L 的方程为

$$\begin{cases} \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

则通过直线 L 的平面束方程为

$$\Pi_\lambda: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (4.2.15)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$.

实际上, Π_λ 是关于 x, y, z 的一次方程, 它表示一个平面. 当 $\lambda = 0$ 时, 它表示平面 Π_1 , 当 λ 趋向于 ∞ 时, 我们规定 Π_∞ 的方程为: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. 即 Π_∞ 就是 Π_2 .

在 4.2.2 节中, 我们把直线看作是两个平面的交线. 一般地, 空间曲线 C 也可以看作是两个空间曲面的交线. 从而空间曲线 C 的方程我们可以用两个空间曲面的方程联立起来表示, 即

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

称为空间曲线 C 的一般式方程. 例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = a (a < R), \end{cases}$$

表示球心在原点, 半径为 R 的球面与平面 $z = a (a < R)$ 的交线, 它是一个在 $z = a$ 平面上的圆. 圆上的任一点的坐标满足 $z = a$ 和 $x^2 + y^2 = R^2 - a^2$, 故也可看作是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2 - a^2$ 与平面 $z = a$ 的交线, 即可写为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - a^2, \\ z = a (a < R). \end{cases}$$

特别地, 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 与三个坐标平面 (xOy 平面, yOz 平面, zOx 平面) 的交线 (如果有的话) 方程分别为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

4.3.2 柱面

一条动直线 L 保持与一条定直线 l 平行, 沿给定的一条空间曲线 C 平行移动所得的曲面称为柱面, 曲线 C 称为柱面的准线, 直线 L 称为柱面的母线.

曲线 C 上的点都在由 $h(x, y) = 0$ 表示的柱面上. 所以, 柱面 $h(x, y) = 0$ 可看成是以 C 为准线、母线平行于 z 轴 (即垂直于 xOy 平面) 的柱面, 这个柱面称为曲线 C 到 xOy 平面的投影

柱面, 而投影柱面与 xOy 平面的交线 $\begin{cases} h(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 就是空间曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线 (或称投影).

定理 4.3.1 (柱面的方程) 以曲线 C :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

为准线, 母线的方向向量为 $s = (l, m, n)$ 的柱面方程为

$$\begin{cases} F(x - lt, y - mt, z - nt) = 0, \\ G(x - lt, y - mt, z - nt) = 0. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

其中 t 为参数. 此式是柱面方程的参数形式, 消去 t 可得柱面方程的直角坐标形式.

特别地是, 以 xOy 平面上的曲线 $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线的方向向量为 $s = (l, m, n)$,

($n \neq 0$) 的柱面方程为

$$f\left(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z\right) = 0.$$

4.3.3 旋转曲面

某个平面上的一条连续曲线 C 绕该平面上的一条定直线 L 旋转一周生成的曲面称为旋转曲面. 这条定直线 L 称为旋转轴, 曲线 C 称为旋转曲面的生成曲线.

定理 4.3.2 (旋转曲面的方程) xOy 平面上的曲线 $C: \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面方程 (见图 4.19) 为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (4.3.5)$$

4.3.4 锥面

已知一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和一条与其不共面的空间曲线 C , 由点 M_0 与曲线 C 上所有点的连线 L 所生成的曲面称为锥面. 点 M_0 称为锥面的顶点, 曲线 C 称为锥面的准线, 锥面上过顶点的任一条直线 L 称为锥面的母线 (见图 4.20).

定理 4.3.3 (锥面的方程) 以 M_0 为顶点, 曲线 C (其方程如式 (4.3.2)) 为准线的锥面方程为

$$\begin{cases} F(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0, \\ G(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

其中 t 为参数, 此式称为锥面的参数式方程. 从中消去参数 t 就得锥面的直角坐标式方程.

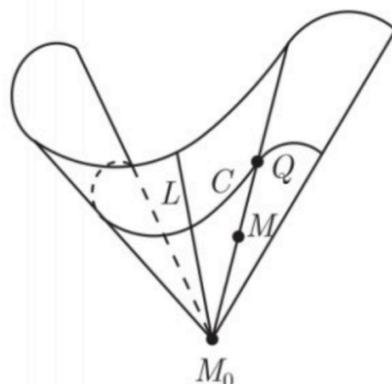


图 4.20

一、空间曲线的参数方程

类似于直线的参数式方程 (4.2.8), 以及平面曲线的参数方程: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 表示, 一条空间曲线也可用参数式方程

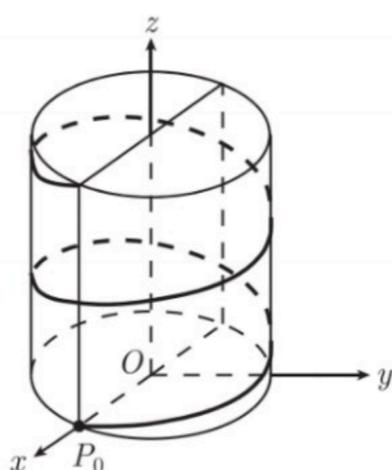


图 4.21

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad (a \leq t \leq b) \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad (4.3.7)$$

表示, 这里 t 是参数. 当 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 在 $[a, b]$ 上皆连续时, 称此曲线为连续曲线.

例 4.3.6 参数方程: $x = a \cos t, y = b \sin t, z = ct$ ($a, b, c > 0$) 表示一条空间曲线. $t = 0$ 对应于点 $P_0(a, 0, 0)$, 当 t 从 0 增大时, 对应的点沿着椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 z 轴右旋式上升. 此曲线称为螺旋线. 螺距为 $2\pi c$. (见图 4.21)

二、空间曲面的参数方程

如果曲面 S 上点的坐标表示为两个参数 (u, v) 的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D_{uv}, \quad (4.3.8)$$

其中 D_{uv} 表示 uv 平面上的区域, 则方程组 (4.3.8) 称为曲面 S 的参数方程. 若从式 (4.3.8) 消去参数 u, v , 就可得曲面 S 的隐式方程 $F(x, y, z) = 0$.

核心理解:

在曲面参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D_{uv}$$

中:

1. u 和 v 只是两个自由变化的参数, 没有直接的几何位置意义。
2. 为了方便想象和描述参数的变化范围, 我们把 (u, v) 看作一个二维坐标系里的点, 这个坐标系就是 uv 平面。
3. D_{uv} 是 uv 平面上的一个区域 (比如矩形、圆盘等), 它规定了参数 u, v 的取值范围。

4.3.6 二次曲面

我们把三元二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \quad (4.3.9)$$

表示的曲面称为二次曲面. 其中 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}, b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$.

我们可以利用空间直角坐标系的平移和旋转变换把一般的二次曲面的方程 (4.3.9) 化为标准形式. 通过平移变换消去一次项, 通过旋转变换消去混合项. 先介绍这两种坐标变换.

假设我们选择了合适的旋转变换, 把二次曲面的方程 (4.3.9) 变化为

怎样合适地旋转是
需要再议的话题

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0. \quad (4.3.13)$$

其中 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$.

(I) 若 a_{11}, a_{22}, a_{33} 都不等于零, 则经过平移变换 (即配方法) 消去一次项, 式 (4.3.13) 变为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D. \quad (4.3.14)$$

其中 $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $D = 0$, 且 A, B, C 不同号, 式 (4.3.14) 是二次齐次方程, 其曲面为二次锥面 (见图 4.24). 标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (4.3.15)$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$.

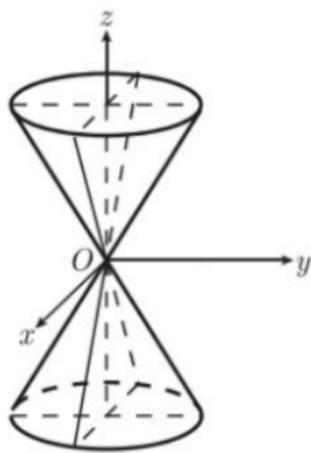


图 4.24

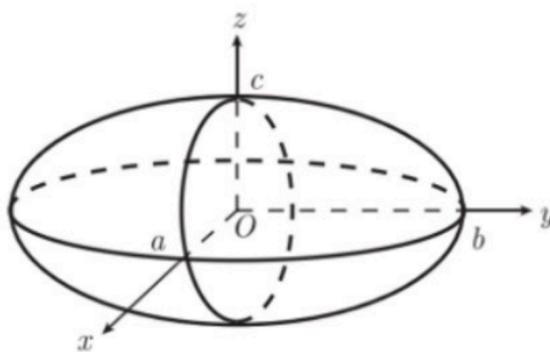


图 4.25

(2) 当 $D \neq 0$, 且 A, B, C 与 D 同号, 其曲面为椭球面 (见图 4.25). 标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.3.16)$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 当 $a = b = c$ 时, 该曲面为半径为 a 的球面.

(3) 当 $D \neq 0$, 且 A, B, C 的符号一个与 D 不同, 两个与 D 相同, 其曲面为单叶双曲面 (见图 4.26). 标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.3.17)$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(4) 当 $D \neq 0$, 且 A, B, C 的符号两个与 D 不同, 一个与 D 相同, 其曲面为双叶双曲面 (见图 4.27). 标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (4.3.18)$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$.

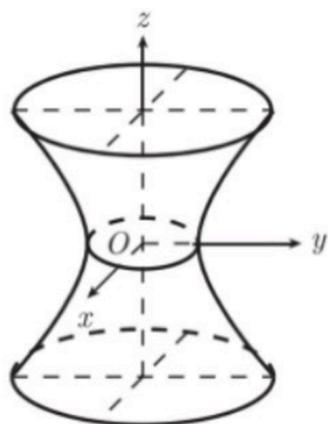


图 4.26

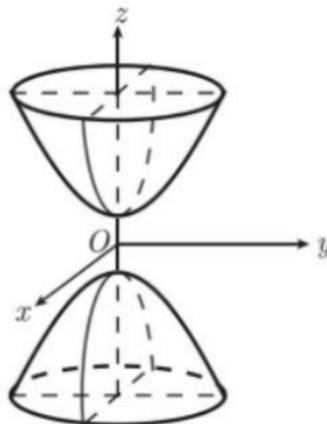


图 4.27

(II) 若 a_{11}, a_{22}, a_{33} 中两个不等于零, 一个等于零, 不妨设 $a_{33} = 0$, 则经平移变换, 式 (4.3.13) 变为

$$Ax^2 + By^2 = 2pz + q. \quad (4.3.19)$$

其中 $A, B, p, q \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $p = 0$ 时, 式 (4.3.19) 中不出现 z , 若 $q \neq 0$, 则曲面是母线平行于 z 轴的柱面. 若 A, B 与 q 同号, 则曲面是椭圆柱面; 若 A 与 B 异号, 曲面是双曲柱面, 方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(\text{或} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \right).$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

若 $q = 0$ 且 A 与 B 异号时, 曲面退化成两张平面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{即} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0.$$

若 $q = 0$ 且 A, B 同号时, 退化为一条直线 (即 z 轴).

(2) 当 $p \neq 0$ 时, 曲面 $Ax^2 + By^2 = 2p \left(z + \frac{q}{2p} \right)$ 称为抛物面.

若 A 与 B 同号, 则称为椭圆抛物面 (见图 4.28), 标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (4.3.20)$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

若 A 与 B 异号, 则称为双曲抛物面, 又称为马鞍面 (见图 4.29), 标准方程为

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z. \quad (4.3.21)$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

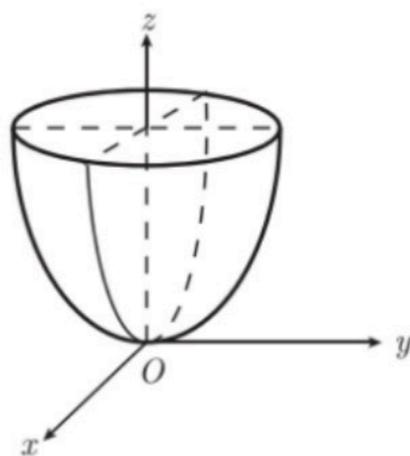


图 4.28

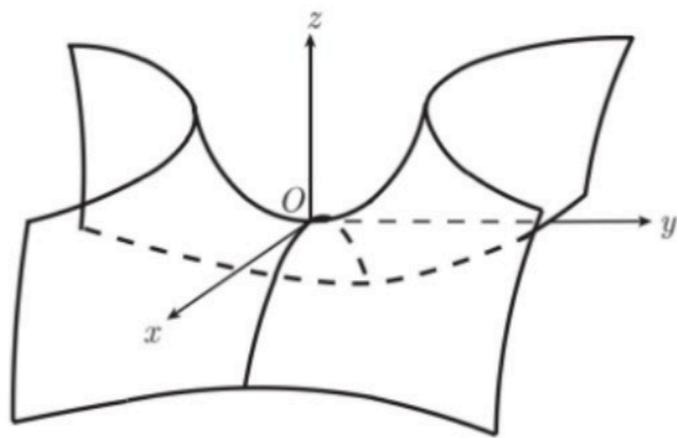


图 4.29

(III) 若 a_{11}, a_{22}, a_{33} 中两个等于零, 不妨设 $a_{11} = a_{22} = 0$, 则式 (4.3.13) 变为

$$cz^2 = px + qy + r. \quad (4.3.22)$$

其中 $c, p, q, r \in \mathbb{R}$. 曲面是母线平行于 xOy 平面的抛物柱面或平行于 z 轴的平面.

从以上讨论可见, 二次曲面的方程式 (4.3.9) 经过平移和旋转变换后仍是二次曲面. 而曲面式 (4.3.9) 与 xOy 平面 ($z = 0$) 的交线是二次曲线

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

其中 $a_{11}, a_{22}, a_{12}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$. 因此, 任何平面与二次曲面的交线都是该平面上的一条二次曲线.

1. 问题重述

空间二次曲面的一般方程为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

我们要通过一个旋转变换 (即正交变换) 消去所有混合项 Dxy, Exz, Fyz , 得到对角化的二次型矩阵。

这其实就是三维二次曲面主轴化的问题。

2. 二次型部分分离

方程可写成矩阵形式 (忽略一次项和常数项先看二次型部分):

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + J = 0$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}$$

因为 M 是对称矩阵, 存在正交矩阵 R ($R^T R = I$) 使得

$$R^T M R = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

这里 λ_i 是 M 的特征值。

3. 旋转变换的构造

设

$$\mathbf{x} = R\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' = (x', y', z')^T$$

则二次型部分:

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = (R\mathbf{x}')^T M (R\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^T (R^T M R) \mathbf{x}' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

混合项被消除。

一次项部分变为:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T R \mathbf{x}' = (\mathbf{b}^T R) \mathbf{x}'$$

记

$$\mathbf{b}' = R^T \mathbf{b}$$

则一次项为 $\mathbf{b}'^T \mathbf{x}'$ 。

于是新方程为:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + J = 0$$

没有交叉项。

4. 具体构造方法 (计算步骤)

1. 计算对称矩阵 M

$$M = \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}$$

2. 求 M 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

解特征方程 $\det(M - \lambda I) = 0$, 得到三个实根 (因为 M 对称)。

3. 求特征向量并正交归一化

对每个特征值 λ_i , 解 $(M - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = 0$, 得到特征向量 \mathbf{v}_i 。

因为 M 对称, 不同特征值的特征向量自然正交; 若特征值重根, 可在对应子空间取正交基。

将 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 单位化得到 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 。

4. 构造正交矩阵 R

令 $R = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$, 且 $\det(R)$ 应为 1 以保证是旋转 (不是镜像)。

若 $\det(R) = -1$, 交换任意两列 (或改为负号某个向量) 来调整为 1。

5. 新方程

$\mathbf{x} = R\mathbf{x}'$ 代入原方程, 得对角化形式。