线性代数第三次自救

一、行列式问题

(1) 利用行列式展开式

例：已知行列式 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&-1&1&-1\\4&2&3&1\\2&5&8&7\end{vmatrix}$，求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}$.

(提示: 即 $-A_{41}+A_{42}-A_{43}+0A_{44}$，$r_4$ 替换成(-1,1,-1,0)的行列式)

解：$M_{41}+M_{42}+M_{43}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&-1&1&-1\\4&2&3&1\\-1&1&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\0&0&0&-1\\4&2&3&1\\-1&1&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}2&1&-3\\4&2&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6&3&0\\4&2&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&3&0\\0&2&3\\-3&1&-1\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}3&0\\2&3\end{vmatrix}=27$

例：设四阶行列式 D 中第1行元素为1,2,0,-4，第3行元素的余子式为 6,x,19,2，求 x.　(提示:不同行元素与代数余子式内积为0)

解：$1\times6-2x+0-2\times(-4)=14-2x=0\Rightarrow x=7$

(2) 利用递推式、分裂式、行列递加递减、行列全加、范德蒙行列式

例：计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&&\\1&a+b&\ddots&\\&\ddots&\ddots&ab\\&&1&a+b\end{vmatrix}$　(提示: c_1 展开或 c_1 拆分)

解：$D_n=(a+b)\begin{vmatrix}a+b&ab&&\\1&a+b&\ddots&\\&\ddots&\ddots&ab\\&&1&a+b\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}ab&&&\\1&a+b&\ddots&\\&\ddots&\ddots&ab\\&&1&a+b\end{vmatrix}=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

特征方程：$x^2-(a+b)x+ab=0\Rightarrow x_1=a,\ x_2=b\Rightarrow D_n=a^n+b^n$

例：若 $A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$，$a,b,c,d$ 为两两互不相等的正数，求 A 的特征值.

(提示: 利用行列式 $\begin{vmatrix}C&D\\D&C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C+D&O\\D&C-D\end{vmatrix}$ 计算特征多项式)

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a-\lambda&b&c&a\\d&a-\lambda&b&c\\c&d&a-\lambda&b\\b&c&d&a-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-\lambda+c&a+b&&\\b+d&a-\lambda+c&&O\\c&d&a-\lambda-c&b-a\\b&c&d-b&a-\lambda-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-\lambda+c&a+b\\b+d&a-\lambda+c\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}a-\lambda-c&b-a\\d-b&a-\lambda-c\end{vmatrix}$

$=[(a-\lambda+c)^2-(a+b)(b+d)][(a-\lambda-c)^2-(b-a)(d-b)]$

$\Rightarrow\lambda=(a+c)\pm\sqrt{(a+b)(b+d)},\ (a-c)\pm\sqrt{(b-a)(d-b)}$

(3) 利用消去作用

例：A, B 为同阶正交矩阵，$|A|+|B|=0$，证明 $|A+B|=0$.

(提示: $A^T(A+B)B^T=(A+B)^T$ 取行列式)

证明：$\because$ A. B正交 $\therefore A^TA=BB^T=E$，又 $\because A^T(A+B)B^T=(E+A^TB)B^T=B^T+A^T=(A+B)^T$

$\therefore |A^T|\cdot|A+B|\cdot|B^T|=|A+B|$，由 $|A|+|B|=0$，知 $|A|\cdot|B|=-1$　$\therefore -|A+B|=|A+B|$　$\therefore |A+B|=0$

(4) 利用和化乘积

例：设方阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B=(\alpha_3-2\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_1)$，且$|B|=6$，求 $|A+B|$.

(提示: $B=AC$, $A+B=A(E+C)$ 取行列式)

解：$B=A\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，记为$C$，$|C|=1\times\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}=-3$ $\therefore |A|=\frac{|B|}{|C|}=\frac{6}{-3}=-2$

$E+C=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&4&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$|E+C|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&4&0\\2&0&1\end{vmatrix}=1\times(-8)=-8$ $\therefore |A+B|=|A|\cdot|E+C|=16$

(5) 利用块三角行列式简化

例：设$A,B\in\mathbf{R}^{m\times n}$，且$m>n$，证$\begin{vmatrix}A&O\\E_n&B^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=0$. (提示: 块三角公式)

证明：$\begin{vmatrix}A&O\\E_n&B^T\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boxed{\,n\,}\;m&O\\1\ddots1&\boxed{m\;\;n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A'&O'\\E_n&B^{T\prime}\end{vmatrix}$，其中$A'=(A\mid O_{(m-n)\times(m-n)})$，$B^{T\prime}=\begin{pmatrix}O_{(m-n)\times(m-n)}\\B\end{pmatrix}$

$\therefore$ 原式$=|A'|\cdot|B^{T\prime}|=0\times0=0$

(6) 块初等变换

例：设$A, B, C, D\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$A$可逆且有$AC=CA$，证明$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.

(提示: $\begin{pmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$ 初等变换 $\begin{pmatrix}1&0\\-c/a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&d-ca^{-1}b\end{pmatrix}$ 推广)

证明：$\begin{vmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|$

二、向量和矩阵问题

(1) 利用矩阵标准形分解

例：设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $m,n\geq2$, $r(A)=2$. 证明存在列向量$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}^m$和$\beta_1, \beta_2\in\mathbf{R}^n$，使得$A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$.

(提示: $A=P\mathrm{diag}(E_2,O)Q=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\mathrm{diag}(E_2,O)(\beta_1,\ldots,\beta_n)^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$)

解：$A=\underbrace{P}_{m\times m}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\\0&&0\end{pmatrix}}_{m\times n}\cdot\underbrace{Q}_{n\times n}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\,\mathrm{diag}(E_2,O)\,(\beta_1,\cdots,\beta_n)^T=\overbrace{(\alpha_1,\alpha_2,0,\cdots,0)}^{n个}\cdot(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T$

(2) 利用矩阵关系、向量关系

$$\begin{cases}AA^{-1}=A^{-1}A=E;\ AA^*=A^*A=|A|E;\ (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1};\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};\ |A^*|=|A|^{n-1}\\(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)A^{-1}\end{cases}$$

例：设 $A^*=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$A$. (提示: $AA^*=|A|E$, $|A^*|=|A|^{n-1}$)

解：$A^*=|A|A^{-1}$，$|A^*|=|A|^n\cdot\frac{1}{|A|}=|A|^{n-1}=|A|^2$，又$\because |A^*|=3\times3=9$ $\therefore |A|=\pm3$

$(A^*)^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&6\\0&0&9\end{pmatrix}$，$A=|A|(A^*)^{-1}=\pm3\times\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&6\\0&0&9\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&6\\0&0&9\end{pmatrix}$

(3) 利用特殊值

例：设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，对任意$\xi\in\mathbf{R}^n$，有$\xi^{\mathrm{T}}A\xi=0$，证明$A$是反对称矩阵.

(提示: 取$\xi=e_i$, $\xi^{\mathrm{T}}A\xi=a_{ii}$，取$\xi=e_i+e_j$, $\xi^{\mathrm{T}}A\xi=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}$)

证明：取$\xi=e_i$，$\xi^{T}A\xi=a_{ii}=0$；取$\xi=e_i+e_j$，$\xi^{T}A\xi=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0$ $\Rightarrow$ $a_{ij}+a_{ji}=0$ $\Rightarrow$为反对称矩阵

(4) 利用吸收作用和消去作用

例：若 $A^2=A$, $B^2=B$, $(A+B)^2=A+B$，证明 $AB=BA=O$.

(提示: $AB+BA=O$左乘A得$AB+ABA=O$，右乘A得$ABA+BA=O$)

证明：$(A+B)^2=A^2+BA+AB+B^2=(A+B)+(AB+BA)=0$ $\Rightarrow$ $AB+BA=0$

又$\because$ $AB+ABA=0$，$BA+ABA=0$ $\therefore$ $AB=BA$ $\therefore$ $AB=BA=0$

(5) 利用秩的关系

$$
\begin{cases}
0\le \mathrm{r}(A)\le\min\{m,n\}\,;\ \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(-A)=\mathrm{r}(kA)=\mathrm{r}(A)\ (k\neq0),\ \mathrm{r}(A)=n-1\Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=1\\
\mathrm{r}(A+B)\le\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\,;\ \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n(A\text{的列数})\le\mathrm{r}(AB)\le\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}\\
\max\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}\le\mathrm{r}(A,B)\le\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\\
\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(PA)=\mathrm{r}(AQ)=\mathrm{r}(PAQ)=\mathrm{r}(\mathrm{diag}(E_{\mathrm{r}(A)},O))\ \ (P\text{、}Q\text{非奇异})\\
\text{行秩=列秩=矩阵秩}\\
|A|\neq0\Leftrightarrow A\text{满秩}\,;\ A\text{列满秩}\Leftrightarrow A\text{列线性无关}\Leftrightarrow Ax=0\text{只有零解}
\end{cases}
$$

例：设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$A^2=-A$，证明 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

(提示: $0=\mathrm{r}(A(E+A))\ge\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)-n$; $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)\ge\mathrm{r}(-A+E+A)=n$)

证明：$A(E+A)=A+A^2=0$ $\therefore$ $0=r(A(E+A))\geq r(A)+r(E+A)-n$ $\Rightarrow$ $r(A)+r(E+A)\le n$

$r(A)+r(A+E)\geq r(A+E-A)=r(E)=n$ $\therefore$ $r(A)+r(E+A)=n$

例：设$A=MN^{\mathrm{T}}$, 其中$M,N\in\mathbf{R}^{n\times r}$ $(r<n)$, $|N^{\mathrm{T}}M|\neq0$，证明 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

(提示: $r=\mathrm{r}((N^{\mathrm{T}}M)^3)\le\mathrm{r}(A^2)\le\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(M)$)

证明：$r((N^TM)^3)=r$ (N^TM为$r\times r$的满秩矩阵)，$(N^TM)^3=N^T(MN^T)^2M=N^TA^2M$ $\therefore r((N^TM)^3)\le r(A^2)$

又$\because$ $r(A^2)=r(A\times A)\le r(A)$，$r(A)=r(MN^T)\le r(M)$，$r(M)\le r$ $\therefore$ $r=r((N^TM)^3)=r(A^2)=r(A)=r$

(6) 利用和化乘积

例：若$BA=A+2B$，证明 $AB=BA$.

(提示: $(B-E)(A-2E)=2E$得$B-E$的逆为$0.5(A-2E)$,可交换)

证明：$(B-E)(A-2E)=BA-A-2B+2E=2E$，$\therefore$ $(B-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$ $\therefore(A-2E)(B-E)=2E$

$\therefore$ $AB-2B-A+2E=2E$ $\Rightarrow$ $AB=A+2B=BA$，得证

例：$A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $B=A^{-1}$, $B^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $C=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\ldots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm{T}}$, 证$C^2=C$，并求$Cx=\theta$的基础解系.

(提示: $C=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)(\beta_1,\ldots,\beta_k)^{\mathrm{T}}=A\mathrm{diag}(E_k,O)A^{-1}$, $CA=A\mathrm{diag}(E_k,O)$)

解：$AB=E$，$B^T=(\beta_1,\cdots,\beta_n) \Rightarrow B=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \vdots \\ \beta_n^T\end{pmatrix}$，$AB=\alpha_1\beta_1^T+\cdots+\alpha_n\beta_n^T=E$

$C=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)(\beta_1,\cdots,\beta_k)^T=A\,\mathrm{diag}(E_k,O)\cdot B=A\,\mathrm{diag}(E_k,O)A^{-1}$ $\therefore C^2=A[\mathrm{diag}(E_k,O)]^2A^{-1}=A\,\mathrm{diag}(E_k,O)A^{-1}=C$

(7) 利用多项式公式

例：设$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，有$A^k=O$ $(k\geq 1)$，证明 $E-A$可逆.

(提示: $(E-A)(E+A+\ldots+A^{k-1})=E-A^k$)

证明：$A^k-E=(A-E)(A^{k-1}+A^{k-2}+\cdots+E) \Rightarrow (E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$

(8) 向量组相关、等价问题

例：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2$是两个线性无关的向量组，且两组向量的内积$(\alpha_i,\beta_j)=0,(i=1,2,3,j=1,2)$，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$线性无关.

(提示: $\alpha+\beta=(t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+t_3\alpha_3)+(s_1\beta_1+s_2\beta_2)=\theta$, $(\alpha,\alpha)=(\alpha,-\beta)=0$)

证明：由已知 $(a_i,\beta_j)=0$ 对所有 i,j 成立，有　　($\alpha=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+t_3\alpha_3$, $\beta=s_1\beta_1+s_2\beta_2$)

$$(\alpha,\beta)=0$$

代入 $\beta=-\alpha$ 得

$$(\alpha,-\alpha)=-(\alpha,\alpha)=0$$

于是 $(\alpha,\alpha)=0$，由内积正定性得 $\alpha=0$。

由 $\{a_i\}$ 线性无关得 $t_1=t_2=t_3=0$。
再由$\beta=-\alpha=0$，由 $\{\beta_j\}$ 线性无关得 $s_1=s_2=0$。

所有系数为零，所以向量组 $\{a_1,a_2,a_3,\beta_1,\beta_2\}$ 线性无关。

例：$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\alpha_i\in\mathbf{R}^n$, $\alpha_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$，且有$A\alpha_i=\alpha_{i+1}$, $1\leq i<n$, $A\alpha_n=0$，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关.

(提示: $A^{n-1}(t_1\alpha_1+\ldots+t_nA^{n-1}\alpha_1)=\theta$得$t_1=0$，
$A^{n-2}(0\alpha_1+t_2\alpha_2+\ldots+t_nA^{n-1}\alpha_1)=\theta$得$t_2=0$依次类推)

证明：因为 $a_k=A^{k-1}a_1$（$k=1,\ldots,n$），且 $A^na_1=0$。
将

$$t_1a_1+t_2Aa_1+\ldots+t_nA^{n-1}a_1=0$$

左乘 A^{n-1}，则 $A^{n-1}A^ma_1=A^{n+m-1}a_1$。

- 当 $m\geq 1$ 时，$n+m-1\geq n\Rightarrow A^{n+m-1}a_1=0$。
- 当 $m=0$（对应 t_1 项）时，$A^{n-1}a_1=a_n\neq 0$。

所以只剩 $t_1a_n=0$，从而 $t_1=0$。　以此类推。

例：设$\alpha_1=(2,4,3,1)^T$, $\alpha_2=(4,8,6,2)^T$, $\alpha_3=(1,3,1,2)^T$, $\beta_1=(1,1,2,-1)^T$, $\beta_2=(2,-3,-5,2)^T$, $\beta_3=(-3,7,12,-5)^T$，请找一个向量γ使得向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma\}$等价.

(提示: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$补$\beta_i$, β_1,β_2,β_3补α_j, 与$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$等价$\gamma=\beta_i+\alpha_j$)

解：$\alpha_2=2\alpha_1$，$\beta_1-2\beta_2=\beta_3$，$\alpha_1-\alpha_3=\beta_1$，故$\{\alpha_1,\alpha_3,\beta_2\}$和$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$等价

同理$\{\alpha_1,\beta_1,\beta_2\}$亦等价，故只需向$\alpha$中补一个$\beta_2$，向$\beta$中补一个$\alpha_1$

令$\gamma=\alpha_1+\beta_2$ 即可让α,β均与$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$等价

(9) 计算A^n

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(-3,2,1)$，计算 A^n, B^n $(n\geq 3)$.

(提示: $(E+C)^n=E+nC+n(n-1)/2C^2$, $(\alpha\beta^T)^n=\alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T=(\beta^T\alpha)^{n-1}(\alpha\beta^T)$)

解：$A=E+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，记为 $E+C$，$C^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$C^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^n=(E+C)^n=E+nC+\frac{n(n+1)}{2}C^2=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n&0\\0&0&n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n^2+n}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

例：计算 $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{99}$.

(提示: $E(3,1(2))^{100}E=E(3,1(200))E$ 即对E初等行倍加100次)

解：记 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，$A^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\200&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$B^2=E$，$B^{99}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\200&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，计算 AP：

$$AP=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}.$$

再左乘 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\200&0&1\end{pmatrix}$，得到

$$M=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\200a_{13}+a_{33}&200a_{12}+a_{32}&200a_{11}+a_{31}\end{pmatrix}.$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}1-a&a\\b&1-b\end{pmatrix}, 0<a,b<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}A^n$.

(提示: $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)P^{-1}$, $A^n=P\mathrm{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n)P^{-1}$)

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-a-\lambda&a\\b&1-b-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+a-1)(\lambda+b-1)-ab=\lambda^2+(a+b-2)\lambda-(a+b-1)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-(a+b-1)$

$\lambda=1$ 时，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-a&a\\b&-b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=-(a+b-1)$ 时，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}b&a\\b&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{a}{b}\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}\\-1\end{pmatrix}$，取 $\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1&a\\1&-b\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b&a\\1&-1\end{pmatrix}$，$A^n=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}1&a\\1&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&a\\1&-1\end{pmatrix}$

$\because a+b-1\in(0,1)$ $\therefore \lambda_2^n\to 0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}A^n=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}1&a\\1&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&a\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b&a\\b&a\end{pmatrix}$

三、方程组问题

(1) 利用关系式

$|A|=0$时$AA^*=A^*A=O$，$\alpha^T\alpha=0$则$\alpha=\theta$

例：设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $|A|=0$, $A^*\neq O$, 求$Ax=0$的通解. **(提示: 用A^*非零列ξ)**

解：由于 $|A|=0$，有 $AA^*=A^*A=0$。由 $A^*\neq 0$ 知存在非零列 ξ（即 A^* 的某一列），满足 $A\xi=0$，故 ξ 是 $Ax=0$ 的解。

又由$A^*\neq 0$ 且 $|A|=0$，可得 $\operatorname{rank}(A)=n-1$（若 $\operatorname{rank}(A)\leq n-2$，则 $A^*=0$），因此 $Ax=0$ 的解空间维数为 1。

所以通解为$x=k\xi$，其中 k 为任意常数，ξ 是 A^* 的任意非零列向量。

例：设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$,$r(A)<n$,$N$为$Ax=0$基础解系向量构成的矩阵,证明 $r(A^T,N)=n$.
(提示: 证明 $Ax=0$, $N^Tx=0$只有零解，用Ny表示$Ax=0$的解)

证明：设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$r(A)=r<n$，$N$ 是 $n\times(n-r)$ 矩阵，其列向量构成 $Ax=0$ 的基础解系，故 $AN=0$ 且 N 列满秩。

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} Ax=0 \\ N^\top x=0 \end{cases}$$

若 x 满足该方程组，由 $Ax=0$ 知 x 属于 $Ax=0$ 的解空间，即存在 $c\in\mathbb{R}^{n-r}$ 使得 $x=Nc$。代入 $N^\top x=0$ 得

$$N^\top Nc=0.$$

由于 N 列满秩，$N^\top N$ 可逆，故 $c=0$，从而 $x=0$。

上述方程组只有零解，等价于矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ N^\top \end{bmatrix}$ 列满秩（即秩为 n）。而

$$\begin{bmatrix} A \\ N^\top \end{bmatrix}^\top=[A^\top,\ N],$$

故 $r([A^\top,N])=n$。

(2) 利用齐次方程组的秩关系

$r(A)+r(N(A))=n$ A的解空间

例：$A,B,C\in\mathbf{R}^{n\times n}$，且有 $r(AB)=r(B)$，则$r(ABC)=r(BC)$.
(提示: $ABx=\theta$, $Bx=\theta$ 同解，从而$ABCy=\theta$, $BCy=\theta$ 同解)

证明：由 $r(AB)=r(B)$ 可知，齐次方程组 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 的解空间相同（因为 $N(B)\subseteq N(AB)$ 且维数相等）。

对任意$y\in\mathbb{R}^n$，若 $ABCy=0$，则 $AB(Cy)=0$，由同解性得 $B(Cy)=0$，即 $BCy=0$；反之，若 $BCy=0$，显然有 $ABCy=0$。故方程组 $ABCy=0$ 与 $BCy=0$ 同解，因此解空间维数相等：

$$n-r(ABC)=n-r(BC),$$

即 $r(ABC)=r(BC)$。

例：若$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，其中$m,n\ge 2$，证明 $r(AA^T)=r(A)$.

(提示: $AA^Tx=0 \Rightarrow (A^Tx)^T(A^Tx)=0$, $AA^Tx=0$与$A^Tx=0$同解，秩相同)

(3) 利用解的组合

例：4元方程组$Ax=b,b\neq0$有解η_1,η_2,η_3. $\eta_1+2\eta_2=(2,3,4,5)^T$, $\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$, 且$r(A)=3$，求方程组的通解. (提示: $A(\eta_1+2\eta_2)=3b$, $A(\eta_2+\eta_3)=2b$)

解：通解为特解＋（$Ax=0$的非零解）。 $\eta_1+2\eta_2-\eta_2-\eta_3=(1,1,1,1)^T$为一个特解，记为$\eta$

$r(A)=3$ $\therefore r(N(A))=1$ 又$\because \frac{1}{2}(1,2,3,4)^T-(1,1,1,1)^T=\frac{1}{2}(-1,0,1,2)$为$Ax=0$的一个解

$\therefore$通解为 $(1,1,1,1)^T+k(-1,0,1,2)^T$

例：已知方程组$Ax=\theta$和$Bx=\theta$分别有基础解系 $\xi_1=(1,-1,1,0)^T$, $\xi_2=(-2,-1,0,1)^T$ 和$\eta_1=(2,-3,1,0)^T$, $\eta_2=(1,-7,0,1)^T$，证明齐次方程组$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$有非零解.

(提示: 复合方程组解 $\gamma=t_1\xi_1+t_2\xi_2=t_3\eta_1+t_4\eta_2$，解方程组 $t_1\xi_1+t_2\xi_2-t_3\eta_1-t_4\eta_2=\theta$得通解 $y=(t_1,t_2,-t_3,-t_4)$，则$\gamma=t_1\xi_1+t_2\xi_2$非零)

证明：即$Ax=0$且$Bx=0$，设解为$\gamma=t_1\xi_1+t_2\xi_2=t_3\eta_1+t_4\eta_2$，解方程组$t_1\xi_1+t_2\xi_2-t_3\eta_1-t_4\eta_2=0$

$$\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\-1&-1&-3&-7\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\-t_3\\-t_4\end{pmatrix}=0,\text{ 记为 } Cy=0,\ C\to\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&-3&-1&-6\\0&2&-1&-1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&1&0&1\\0&0&-1&-3\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&0&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解为$k(-3,1,3,-1)^T$，取$\gamma=-3\xi_1+\xi_2$即可

(4) 利用等价问题

例：若A、$B\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$r(A)=n-s$, $r(B)=n-t$, $s+t>n$，证明$Ax=0$和$Bx=0$有非零公共解. (提示: 等价于$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$有非零解)

证明：$r(N(A))=s$，$r(N(B))=t$，设$Ax=0$基础解系为α，$Bx=0$基础解系为β，$\alpha\cup\beta$中有$>n$个向量

故必存在一个$\eta\in\alpha\cup\beta$，可用其中其它向量表示，则$A\eta=0$，$B\eta=0$

例：求以$\alpha_1=(1,-1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0,1)^T$, $\alpha_3=(2,0,1,1)^T$为解向量的一个齐次方程组.

(提示: $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=O\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^TA^T=O\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^Ty=\theta$基础解系)

解：即$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$，即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^TA^T=0$，即解$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^Ty=0$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&1&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&2&-1&1\\0&2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

可令$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2&0\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=0\\x_2-2x_4=0\end{cases}$

(5) 反证法

例: 设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 证明$r(A^n)=r(A^{n+1})$. (提示: $A^{n+1}\alpha=0$, $A^n\alpha\neq0$则$\alpha,A\alpha,\dots,A^n\alpha$无关)

证明：若A^{n+1}的秩不等于$r(A^n)$，则$A^n\alpha$与$A^{n+1}\alpha=0$不同解。即存在α，$A^{n+1}\alpha=0$，$A^n\alpha\neq0$

这意味着 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha$ 线性无关（证法：设 $c_0\alpha + c_1A\alpha + \cdots + c_nA^n\alpha = 0$，同乘 A^n，得 $c_0A^n\alpha = 0 \Rightarrow c_0 = 0$，同理 $c_1 = \cdots = c_n = 0$）

而 α 为 n 维向量，矛盾。故 $r(A^n) = r(A^{n+1})$

例：设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，且有 $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1\sim n, j\neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n$，证明 A 可逆.

(提示: 有非零解 x, $|x_k|$ 最大, $a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n=0$ 产生矛盾)

证明：若 A 不可逆，则不满秩，则有非零解 x。取 x 绝对值最大的分量 x_k，有 $a_{kk}x_k = -\sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j$

$|a_{kk}||x_k| = \left|-\sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j\right| \leq \sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \quad \therefore |a_{kk}| \leq \sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|$，矛盾

(6) 利用 $r(A)=r(A,B)=r(B)$，则 A, B 的列向量组等价

例：若 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, B \in \mathbf{R}^{k\times n}$，则 $Ax=\theta, Bx=\theta$ 同解 $\Leftrightarrow$ A, B 行向量组等价.

(提示: $Ax=\theta, Bx=\theta$ 同解 $\Leftrightarrow$ $Ax=\theta, Bx=\theta, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \theta$ 同解 $\Leftrightarrow$ A,B 行向量组等价)

证明：转化成 A^T，B^T 和 (A^T, B^T) 去证列向量等价即可，直接用 $r(A^T) = r(A^T, B^T) = r(B^T)$ 的结论。